JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

PUISEUX, V.

Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 16 (1851), p. 228-240.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1851_1_16_A15_0>

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES,

PAR M. V. PUISEUX,

Maître de Conférences à l'École Normale.

I.

L'intégrale $\int_c u_1\,dz$, dans laquelle u_1 désigne une fonction de z assujettie à varier avec z par degrés insensibles et à satisfaire à l'équation algébrique

$$f(u, z) = 0,$$

a, en général, une infinité de valeurs. Ces valeurs répondent, comme l'a montré M. Cauchy, aux divers chemins par lesquels le point mobile Z correspondant à la variable imaginaire z peut aller du point C correspondant à $z = c$ au point K correpondant à $z = k$.

Dans un précédent travail [*], en suivant la marche indiquée par M. Cauchy, j'ai fait voir que d'une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ on peut déduire une infinité d'autres valeurs de la même intégrale, en ajoutant à la première des multiples entiers quelconques de certaines constantes : chacune de ces constantes, auxquelles j'ai donné le nom de *périodes*, est de la forme

$$p = \int u_n\,dz,$$

[*] *Voir* dans le Journal de M. Liouville, tome XV, le Mémoire intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques.*

u_n désignant une des fonctions déterminées par l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

et l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé tel, qu'après une révolution du point Z sur ce contour la fonction u_n reprenne sa valeur initiale. Mais il n'est pas évident que toute quantité p, définie comme je viens de le faire, soit, en effet, une période de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, ni que cette période appartienne à toutes les valeurs de l'intégrale. Je me propose de prouver qu'il en est ainsi, lorsque l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est irréductible [*], de sorte que si, à une valeur quelconque de l'intégrale $\int_c^k u_1\, dz$, on ajoute un multiple entier d'une quelconque des quantités de la forme p, on ne cessera pas d'avoir une valeur de la même intégrale : ainsi se trouvera résolue généralement la seconde des questions que je m'étais posées au n° 48 du Mémoire cité.

Pour établir le théorème dont il s'agit, je vais d'abord prouver la proposition suivante :

Si une fonction algébrique de z, assujettie à varier avec z par degrés insensibles, n'a qu'une valeur, c'est-à-dire si elle reprend toujours la même valeur, lorsque le point mobile Z revient à la même position, cette fonction est nécessairement rationnelle.

En effet, appelons v cette fonction et soit

$$Nv^m + Pv^{m-1} + Qv^{m-2} + \ldots + Sv + T = 0$$

l'équation à laquelle elle satisfait, N, P,..., T désignant des polynômes entiers en z. Si l'on pose

$$Nv = u,$$

---

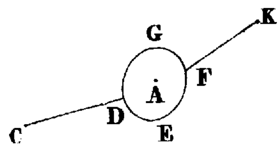
[*] J'entends que cette équation est irréductible, lorsque le premier membre n'est divisible par aucun polynôme entier en u et z : il est permis d'ailleurs de supposer que ce premier membre n'a pas de facteur entier fonction de z seulement.

la fonction u n'aura, comme v, qu'une seule valeur pour chaque valeur de z et satisfera à l'équation

$$(1)\qquad u^m + Pu^{m-1} + NQu^{m-2} + \ldots + N^{m-2}Su + N^{m-1}T = 0 :$$

de plus, elle ne deviendra infinie pour aucune valeur finie de z.

Maintenant on voit sans peine que l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ conservera la même valeur, si, les limites c et k restant les mêmes, on déforme le chemin CMK par lequel le point mobile va de C en K. C'est ce qui se trouve établi dans le Mémoire cité (n° 9), en supposant que le chemin CMK ne franchisse en se déformant aucun des points A, A', etc., pour lesquels la fonction u devient égale à une autre racine de l'équation (1) : mais ici l'intégrale dont il s'agit ne changera pas non plus, lors même que le chemin CMK franchirait un des points A, A', etc., le point A par exemple. En effet, décrivons autour de ce point un contour fermé infiniment petit DEFG et joignons respectivement les



points C et K à deux points D et F de ce contour; je dis que la valeur de l'intégrale $\int_c^k u\,dz$ prise le long du chemin CDEFK est égale à la valeur de la même intégrale prise le long du chemin CDGFK. En effet, chacune de ces valeurs, et, par conséquent, leur différence, si elles en ont une, est indépendante des dimensions du contour DEFG. D'un autre côté, la fonction u n'ayant qu'une valeur en chaque point des lignes CD, FK, la différence dont je viens de parler se réduit à la valeur ε de l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long du contour DEFG. Or la fonction conserve une valeur finie pour toute valeur finie de z : ainsi on est assuré, en resserrant suffisamment le contour DEFG, de rendre le module de ε moindre que toute quantité donnée, et comme ε ne dépend pas des dimensions de ce contour, il faut bien qu'on ait

$$\varepsilon = 0;$$

ce qu'il s'agissait de prouver.

Concevons à présent que, les points C et K coïncidant, le chemin CMK devienne un contour fermé; l'intégrale $\int u\,dz$ prise le long de ce contour sera indépendante du point C qu'on y prendra pour point de départ de Z (n° **12**) [*]. De plus, il suit de ce qu'on vient de dire, qu'elle gardera la même valeur lorsque ce contour se déformera d'une manière quelconque : elle est donc toujours nulle, puisqu'on peut faire décroître jusqu'à zéro les dimensions du contour.

Posons

$$u = \varphi(z),$$

et appelons γ la valeur particulière de z qui correspond au point Γ; la fonction

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma}$$

n'aura, comme $\varphi(z)$ ou u, qu'une seule valeur pour chaque valeur de z et sera toujours finie, même pour $z = \gamma$. En effet, la fonction $\varphi(z)$ reprenant sa valeur après une révolution de Z autour de Γ, le système circulaire dont cette fonction fait partie relativement au point Γ n'a qu'un terme (n° **18**) : pour des valeurs suffisamment petites de $z - \gamma$, on peut donc (n° **23**) développer $\varphi(z)$ en une série convergente ordonnée suivant les puissances entières et positives de $z - \gamma$, de sorte qu'on ait

$$\varphi(z) = \varphi(\gamma) + A(z - \gamma) + B(z - \gamma)^2 + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(\gamma)}{z - \gamma} = A + B(z - \gamma) + \ldots,$$

[*] Les numéros auxquels je renvoie sont toujours ceux des *Recherches sur les fonctions algébriques*.

par où l'on voit que la fonction

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}$$

conserve, pour $z=\gamma$, la valeur finie A.

En appliquant à cette fonction ce qui a été dit de la fonction u, nous arrivons à cette conclusion, que l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz,$$

prise le long d'un contour fermé quelconque, est égale à zéro : il en résulte l'équation

$$\varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma}=\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

les intégrales des deux membres étant prises le long d'un même contour fermé quelconque. Supposons, ce qui est permis, tous les points de ce contour situés à une distance de l'origine supérieure au module de γ: on trouvera aisément $2\pi\sqrt{-1}$ pour la valeur de l'intégrale $\int \frac{dz}{z-\gamma}$. On aura d'ailleurs en série convergente

$$\frac{1}{z-\gamma}=\frac{1}{z}+\frac{\gamma}{z^2}+\frac{\gamma^2}{z^3}+\ldots,$$

et, par conséquent, l'équation précédente pourra s'écrire

$$2\pi\sqrt{-1}\,\varphi(\gamma)=\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z}+\gamma\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2}+\gamma^2\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^3}+\ldots,$$

les intégrales du second membre pouvant maintenant être prises le long d'un contour fermé quelconque, pourvu qu'il renferme l'origine des coordonnées, par exemple le long d'une circonférence décrite de cette origine comme centre.

Cela posé, appelons $n, p, q, r,\ldots, s, t$ les degrés par rapport à z des polynômes entiers N, P, Q, R,..., S, T et désignons par μ un nombre entier supérieur au plus grand des nombres

$$p,\quad \frac{n+q}{2},\quad \frac{2n+r}{3},\ldots,\quad \frac{(m-2)n+s}{m-1}.\quad \frac{(m-1)n+t}{m}.$$

De l'équation (1) mise sous la forme

$$\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^m + \frac{P}{z^\mu}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-1} + \frac{NQ}{z^{2\mu}}\left(\frac{u}{z^\mu}\right)^{m-2} + \ldots + \frac{N^{m-2}S}{z^{(m-1)\mu}}\frac{u}{z^\mu} + \frac{N^{m-1}T}{z^{m\mu}} = 0,$$

nous conclurons que toutes les valeurs de $\frac{u}{z^\mu}$ convergent vers zéro, quand z augmente jusqu'à l'infini : ainsi le module de $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ pourra être rendu aussi petit que l'on voudra, en prenant celui de z assez grand. Or, si l'on appelle M le maximum des valeurs que prend le module de $\frac{\varphi(z)}{z^\mu}$ le long d'une circonférence décrite de l'origine comme centre, l'intégrale $\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{\mu+1}}$, prise le long de cette circonférence, aura un module moindre que le produit $2\pi M$ de M par le module 2π de $\int \frac{dz}{z}$: par suite, le coefficient de γ_μ dans le développement de $\varphi(\gamma)$ aura un module moindre que M. Mais en prenant le rayon assez grand, on peut rendre M aussi petit qu'on le veut; d'autre part, le coefficient dont il s'agit est une quantité déterminée indépendante de ce rayon; il faut donc qu'il soit nul. Ainsi le développement de $\varphi(\gamma)$ ne contient aucune puissance de γ dont l'exposant soit supérieur au plus grand des nombres

$$p,\quad \frac{n+q}{2},\quad \frac{2n+r}{3},\ldots,\quad \frac{(m-1)n+t}{m}:$$

ce développement se compose donc d'un nombre limité de termes, ce qui revient à dire que $\varphi(\gamma)$ est une fonction entière de γ ou, si l'on veut, que u est une fonction entière de z. Par suite, la fonction v égale à $\frac{u}{N}$ est une fonction rationnelle de z, ainsi que je l'avais annoncé.

Je reviens maintenant à l'équation irréductible

$$f(u, z) = 0,$$

à laquelle satisfont les fonctions $u_1, u_2,\ldots, u_m$, et je dis qu'ayant choisi à volonté deux de ces fonctions, u_1 et u_n par exemple, on pourra toujours tracer, à partir d'un point donné C, un contour fermé tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, u_1 acquière la valeur initiale de u_n.

En effet, s'il en était autrement, les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ se partageraient en deux groupes, l'un G formé de la racine u_1 et des racines dont u_1 peut acquérir la valeur initiale, l'autre G' formé des racines dont u_1 ne peut acquérir la valeur initiale et parmi lesquelles se trouverait u_n. Or, quel que soit le contour fermé (Δ) qu'on fasse décrire à Z à partir du point C, aucune des racines du premier groupe ne pourra échanger sa valeur initiale avec une racine du second : car, si, après une révolution de Z sur (Δ), la racine u_i du groupe G acquérait la valeur initiale d'une racine $u_{i'}$ du groupe G', comme on peut trouver un contour fermé (Γ) sur lequel u_1 acquière la valeur initiale du u_i, il s'ensuivrait qu'après une révolution de Z sur le contour fermé $(\Gamma)(\Delta)$, u_1 acquerrait la valeur initiale de $u_{i'}$, ce qui est contraire à la définition de nos deux groupes.

Les racines du groupe G ne pouvant échanger qu'entre elles leurs valeurs initiales, une fonction symétrique λ de ces racines reprendra toujours la même valeur, par quelque chemin que le point mobile Z revienne en C. On en conclut facilement que λ n'a qu'une seule valeur pour chaque valeur de z : en effet, soit

$$F(\lambda, z) = 0$$

l'équation algébrique à laquelle λ satisfait; on peut toujours supposer qu'au point C, λ est une racine simple de cette équation (si le contraire avait lieu, on remplacerait le point C par un point infiniment voisin). Admettons à présent qu'en un point K, λ puisse acquérir deux valeurs différentes h et h', suivant que Z y arrive par le chemin CLK ou par le chemin CMK. Parmi les fonctions $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., que détermine l'équation

$$F(\lambda, z) = 0,$$

il y en aurait une $\lambda^{(i)}$ autre que λ qui acquerrait en K la valeur h, lorsque Z suivrait le chemin CMK; alors, en faisant décrire à Z le contour fermé CLKMC, on verrait λ prendre au point C la valeur initiale de $\lambda^{(i)}$, ce qui est impossible, puisque λ doit toujours reprendre la même valeur au point C.

La fonction λ, n'ayant qu'une valeur pour un point quelconque K, c'est-à-dire pour une valeur quelconque de z, serait nécessairement une fonction rationnelle de z, ainsi qu'on l'a prouvé plus haut. On pourrait donc exprimer rationnellement en z la somme des racines qui composent le groupe G, puis celle de leurs produits deux à deux, trois à trois, etc. : ces racines satisferaient, par suite, à une équation algébrique d'un degré moindre que le degré de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que celle-ci est irréductible. Concluons donc qu'on peut toujours tracer par le point C un contour fermé sur lequel u_1 acquière la valeur initiale de u_n.

J'arrive enfin à la proposition qui fait l'objet spécial de cette Note : soit v_1 la valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ prise le long d'un chemin quelconque CMK; soit p la valeur de l'intégrale $\int u_n\,dz$ prise le long d'un contour fermé tel, que la fonction u_n reprenne sa valeur initiale après une révolution de Z. On pourra déformer ce contour de manière qu'il passe au point C sans altérer la valeur de p qui sera ce que j'ai appelé une période; quant au contour ainsi déformé, je désignerai par (Φ) sa caractéristique. Pour voir maintenant qu'en ajoutant p à v_1, on a encore une valeur de l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$, il suffit de se rappeler qu'on peut toujours tracer à partir du point C un contour fermé (Γ) tel, qu'après une révolution de Z sur ce contour, u_1 acquière la valeur initiale de u_n, et qu'alors sur le même contour parcouru en sens contraire $(-\Gamma)$, u_n acquerra la valeur initiale de u_1. Si donc on prend l'intégrale $\int_c^k u_1\,dz$ le long du chemin

$$(\Gamma)(\Phi)(-\Gamma) + \text{CMK},$$

les portions relatives aux parties (Γ), $(-\Gamma)$ de la caractéristique seront égales et de signes contraires, et la valeur de l'intégrale se réduira à

$$p + v_1.$$

De même, la valeur de la même intégrale prise le long du chemin

$$(\Gamma)(-\Phi)(-\Gamma) + \mathrm{CMK}$$

sera

$$-p + v_1.$$

Ainsi, à une valeur quelconque v_1 de l'intégrale $\int_0^k u_1\,dz$ on peut ajouter ou retrancher une période quelconque p, et, par conséquent, ajouter ou retrancher des multiples entiers quelconques de toutes les périodes : en d'autres termes, chaque période appartient à toutes les valeurs de l'intégrale, si, comme je l'ai supposé, l'équation

$$f(u, z) = 0$$

est irréductible.

II.

Soient toujours $u_1, u_2, \ldots, u_m$ les m fonctions de z qui satisfont à l'équation

$$f(u, z) = 0;$$

j'ai prouvé tout à l'heure qu'en faisant partir le point Z d'une position donnée et l'y ramenant par des chemins convenablement choisis, on pouvait faire acquérir à la fonction u_1 les valeurs de toutes les autres, pourvu que l'équation fût irréductible. C'est ce que l'on peut exprimer en disant qu'une fonction algébrique qui satisfait à une équation irréductible du degré m a précisément m valeurs pour chaque valeur de z : il est bien entendu qu'on doit excepter les valeurs de z en nombre limité pour lesquelles l'équation a des racines égales.

Il n'en serait plus de même si l'équation n'était pas réductible : supposons, en effet, que le polynôme $f(u, z)$ soit le produit de deux polynômes premiers entre eux $\varphi(u, z)$, $\psi(u, z)$. Les fonctions u_1, $u_2, \ldots, u_m$ se partageront en deux groupes formés, l'un de celles qui satisfont à l'équation

$$\varphi(u, z) = 0,$$

l'autre de celles qui satisfont à l'équation

$$\psi(u, z) = 0.$$

Les fonctions de chaque groupe n'échangeront leurs valeurs qu'entre elles; chacune des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ aura donc un nombre de valeurs au plus égal au degré en u de l'un des polynômes $\varphi(u, z)$, $\psi(u, z)$, et, par conséquent, moindre que m.

La réciproque de la proposition précédente est également vraie, savoir qu'une fonction algébrique de z, qui a m valeurs pour chaque valeur de z, satisfait à une équation irréductible du degré m : car, si l'équation irréductible qu'elle vérifie était d'un degré n différent de m, la fonction aurait n valeurs, tandis qu'elle en a m par hypothèse. En particulier, si la fonction n'a qu'une valeur, elle est nécessairement rationnelle, comme on l'a vu ci-dessus.

Proposons-nous maintenant de reconnaître si une équation algébrique à deux variables

$$f(u, z) = 0,$$

dont les coefficients réels ou imaginaires sont donnés numériquement, est irréductible ou non [*].

Les valeurs de z qui font acquérir des racines égales ou infinies à l'équation proposée sont les racines d'une équation

$$\varphi(z) = 0,$$

qu'on sait former : ces valeurs sont donc en nombre limité; je les appellerai a, a', a'', etc., et elles correspondront à des points que je nommerai A, A', A'', etc. Je désignerai, en outre, par c une valeur de z arbitraire, mais différente toutefois des quantités a, a', a'', etc., et par C le point correspondant. L'équation

$$f(u, c) = 0$$

aura m racines inégales $b_1, b_2, \ldots, b_m$ qu'on pourra regarder comme

---

[*] J'exclus le cas où cette équation aurait des racines égales, quelle que soit z; si cela avait lieu, elle se partagerait en plusieurs autres par la théorie connue des racines égales.

les valeurs initiales des m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Décrivons, à partir du point C, des contours fermés dont chacun renferme un seul des points A, A′, A″, etc., tous les autres lui étant extérieurs, et représentons par (A) le contour qui renferme le point A, par (A′) celui qui renferme le point A′, et ainsi de suite. On saura déterminer, comme je l'ai expliqué dans le Mémoire déjà cité, nos **28** et **29**, quelle est, pour chacun de ces contours élémentaires, la fonction $u_{i'}$ dont une fonction u_i acquiert la valeur initiale $b_{i'}$ après une révolution du point Z. On trouvera ainsi que la fonction u_1, par exemple, peut acquérir après une révolution de Z sur un seul contour élémentaire les valeurs initiales d'un certain nombre d'autres fonctions $u_n, u_p, \ldots, u_r$: on trouvera de même, en considérant chacune de celles-ci en particulier, les fonctions dont elles peuvent acquérir les valeurs initiales après une révolution de Z sur un contour élémentaire. Si parmi ces fonctions il y en a d'autres que $u_1, u_n, u_p, \ldots, u_r$ et qu'on les désigne par $u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}$, on cherchera encore les fonctions dont $u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}$ peuvent acquérir les valeurs initiales par une révolution de Z sur un contour élémentaire : si l'on arrive ainsi à des fonctions $u_{n''}, u_{p''}, \ldots, u_{r''}$ qu'on n'ait pas encore rencontrées, on continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ne retrouve plus que des fonctions déjà obtenues; c'est ce qui arrivera nécessairement après un nombre limité de recherches de ce genre. On connaîtra ainsi toutes les fonctions distinctes $u_1, u_n, u_p, \ldots, u_r, u_{n'}, u_{p'}, \ldots, u_{r'}, u_{n''}$, etc., dont u_1 peut acquérir les valeurs initiales. Cela fait, il arrivera de deux choses l'une : ou ces fonctions seront au nombre de m, de manière que leur ensemble soit justement celui des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$; dans ce cas, la fonction u_1 aura m valeurs et l'équation

$$f(u, z) = 0$$

sera certainement irréductible : ou bien le nombre μ de ces fonctions sera moindre que m, et alors la fonction u_1 ayant μ valeurs satisfera à une équation irréductible du degré μ; l'équation proposée ne sera donc pas irréductible.

Appelons, dans ce dernier cas, $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ les fonctions dont u_1 peut acquérir les valeurs initiales; ces fonctions n'échangeront leurs valeurs qu'entre elles. Parmi les racines restantes de l'équation

$$f(u, z) = 0,$$

prenons-en une à volonté $u_{\mu+1}$; on trouvera de même qu'elle peut acquérir les valeurs d'un certain nombre ν de fonctions que j'appelle $u_{\mu+1}, u_{\mu+2}, \ldots, u_{\mu+\nu}$. S'il reste encore des racines, on trouvera semblablement un nouveau groupe de ρ fonctions pouvant échanger leurs valeurs, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé toute la série des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$. On saura donc que l'équation proposée

$$f(u, z) = 0$$

se partage en autant d'équations irréductibles qu'on a formé de groupes, et les degrés de ces groupes seront respectivement les nombres μ, ν, ρ, etc.

On a donc un procédé pour reconnaître si une équation entre deux variables est irréductible, et, si elle ne l'est pas, pour déterminer les degrés des équations irréductibles dans lesquelles elle se partage. Il serait même aisé de former les fonctions entières de z qui servent de coefficients aux diverses puissances de u dans ces équations; mais j'omets ces détails pour abréger.

Il est bon d'observer que, dans l'application, il ne sera pas nécessaire d'avoir les valeurs exactes des racines a, a', a'', etc., de l'équation

$$\varphi(z) = 0;$$

il suffira d'avoir pour chacun des points correspondants A, A′, A″, etc., un contour qui le renferme seul. Or on saura toujours effectuer cette séparation à l'aide du beau théorème de M. Cauchy sur le nombre des racines imaginaires renfermées dans un contour.

Prenons pour exemple l'équation

$$u^3 - u + z = 0,$$

qui devient celle de la trisection de l'angle, lorsqu'on y remplace z par $-\frac{2x}{3\sqrt{3}}$ et u par $\frac{2y}{\sqrt{3}}$. Il n'y a que deux valeurs de z qui lui fassent acquérir des racines égales, savoir :

$$z = + \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad z = - \frac{2}{3\sqrt{3}};$$

appelons A et A′ les points correspondants et nommons u_1, u_2, u_3 les trois fonctions qui vérifient l'équation proposée et dont les valeurs initiales, pour $z = 0$, sont respectivement 0, $+1$, -1 : on trouve sans peine, nº 32, qu'après une révolution de Z sur le contour (A), u_1 acquiert la valeur initiale de u_2, et qu'après une révolution de Z sur le contour (A′), u_1 prend la valeur initiale de u_3. La fonction u_1 a donc trois valeurs, et, par suite, l'équation

$$u^3 - u + z = 0$$

est irréductible, ce qui, d'ailleurs est évident, en y regardant z comme une fonction de u.