Journal de mathématiques pures et appliquées

Besge

Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 14 (1849), p. 31-32.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1849_1_14_A3_0>

SUR L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx\,;$$

PAR M. BESGE.

On sait depuis longtemps et on a prouvé de bien des manières que l'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx$$

est une fonction discontinue de a, évidemment nulle pour $a = 0$, mais égale à $\frac{\pi}{2}$ pour a positive, à $-\frac{\pi}{2}$ pour a négative. Peut-être cependant me pardonnera-t-on, en faveur de la simplicité du procédé, d'indiquer ici comment on doit, suivant moi, démontrer ces résultats dans un traité élémentaire.

J'observe d'abord qu'on a

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy;$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \sin ax\, dx \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy.$$

En intervertissant l'ordre des intégrations, le second membre de cette dernière équation devient

$$\int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} \sin ax\, dx,$$

et à cause de

$$\int_0^{\infty} e^{-xy} \sin ax\, dx = \frac{a}{a^2 + y^2},$$

il se réduit à

$$\int_0^{\infty} \frac{a\, dy}{a^2 + y^2},$$

c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$, o, ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que a est positive, nulle ou négative. Telle est donc aussi la valeur de

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx,$$

dans les mêmes circonstances; ce qu'il fallait démontrer.