Journal de mathématiques pures et appliquées

Roberts, M.

Nouvelles propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure sur l'ellipsoïde.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 1-11.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

NOUVELLES PROPRIÉTÉS
DES LIGNES GÉODÉSIQUES ET DES LIGNES DE COURBURE
SUR L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. MICHAEL **ROBERTS**.

Dans le numéro de janvier 1846 de ce Journal, j'ai tiré quelques conséquences intéressantes de l'intégrale première de l'équation différentielle du second ordre qui appartient à une ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes inégaux. Cette équation, donnée pour la première fois par M. Jacobi, a été mise par M. Liouville sous une forme très-élégante, qui exprime par elle-même toutes les propriétés auxquelles je fais allusion. L'article actuel aura pour objet de présenter l'intégrale seconde de l'équation d'une ligne géodésique qui passe par un ombilic de la surface d'une manière très-expressive, qui fera connaître beaucoup de propriétés curieuses, tant des lignes de courbure que des lignes géodésiques elles-mêmes.

Adoptons les notations employées par M. Liouville dans son article inséré au tome IX de ce Journal, page 401, sauf un léger changement qui consiste à substituer à la lettre ρ la lettre a, en sorte que le grand axe de l'ellipsoïde sera désigné ici par $2a$. Soient O, O′, O″, O‴ les ombilics de la surface. Pour fixer les idées, nous supposerons que O et O′ sont deux foyers intérieurs des lignes de courbure représentées par l'équation $\mu =$ constante; O″ et O‴ seront les ombilics opposés à O et O′. On a généralement aux ombilics $\mu^2 = \nu^2 = b^2$; mais nous admettrons d'une manière plus précise que pour l'ombilic O on a $\mu = b$, $\nu = b$, tandis que $\mu = b$ et $\nu = -b$ pour l'ombilic O′. Maintenant soit OP une ligne géodésique passant par l'ombilic O, et dont P ou (μ, ν) est un point quelconque. On sait que pour une telle ligne la constante $\beta = b^2$. Les lignes géodésiques OP sont donc toutes représentées par l'équation

$$\int \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \alpha,$$

et ne diffèrent que par la valeur qu'on assigne à la quantité constante α. D'un autre côté, chaque ligne sera évidemment déterminée par l'angle $\mathrm{POO'} = \omega$ qu'elle forme avec la section principale qui contient les ombilics. Il résulte de là que la quantité α est une fonction de ω. Nous ferons donc $\alpha = \mathrm{F}(\omega)$, et en différentiant l'équation précédente dans l'hypothèse de μ, ν, ω variables simultanément, nous aurons

$$(1)\qquad \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = d\mathrm{F}(\omega).$$

Soient maintenant $\mu = b + \eta$, $\nu = b - \varepsilon$; en opérant ces substitutions dans l'équation (1), elle devient

$$\frac{d\eta}{2b\eta + \eta^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2-2b\eta-\eta^2}{c^2-b^2-2b\eta-\eta^2}} - \frac{d\varepsilon}{2b\varepsilon-\varepsilon^2}\sqrt{\frac{a^2-b^2+2b\varepsilon-\varepsilon^2}{c^2-b^2+2b\varepsilon-\varepsilon^2}} = d\mathrm{F}(\omega),$$

ou

$$d\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\eta}{\eta\left(1+\dfrac{\eta}{2b}\right)}\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{2b}{a^2-b^2}\eta-\dfrac{\eta^2}{a^2-b^2}}{1-\dfrac{2b}{c^2-b^2}\eta-\dfrac{\eta^2}{c^2-b^2}}} \\ -\dfrac{d\varepsilon}{\varepsilon\left(1-\dfrac{\varepsilon}{2b}\right)}\sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2b}{a^2-b^2}\varepsilon-\dfrac{\varepsilon^2}{a^2-b^2}}{1+\dfrac{2b}{c^2-b^2}\varepsilon-\dfrac{\varepsilon^2}{c^2-b^2}}} \end{array}\right\}.$$

Faisons marcher le point P sur la ligne géodésique OP déterminée par l'angle ω, de manière à rapprocher indéfiniment ce point de l'ombilic O où l'on a $\mu = b$, $\nu = b$. En même temps que les quantités η, ε convergeront ainsi vers zéro, le second membre de cette équation tendra à devenir

$$\frac{1}{2b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right).$$

D'un autre côté, si nous désignons par θ l'angle compris entre l'arc OP prolongé et un second arc géodésique O′P passant par l'autre ombilic O′, et si nous observons que cet angle est le double de l'angle désigné par i dans le Mémoire de M. Liouville, nous aurons

$$(b+\eta)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (b-\varepsilon)^2\sin^2\frac{\theta}{2} = b^2,$$

d'où

$$\operatorname{tang}^2\frac{\theta}{2} = \frac{\eta(2b+\eta)}{\varepsilon(2b-\varepsilon)}.$$

Or l'angle ω est la limite vers laquelle tend l'angle θ, quand η et ε se rapprochent indéfiniment de zéro: on a donc, à la limite,

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2};$$

par suite,

$$dF(\omega) = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'équation (1) devient, dès lors,

$$\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\,d\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2},$$

et l'on en conclut, en intégrant,

$$\int_c^{\mu}\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int_0^{\nu}\frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} + C.$$

Pour déterminer la constante C, considérons la ligne géodésique particulière qui passe par le sommet de l'axe moyen de l'ellipsoïde, c'est-à-dire par le point pour lequel $\mu = c$, $\nu = 0$. A cause de la symétrie de la surface, et en se rappelant que toutes les lignes géodésiques qui partent d'un ombilic vont aboutir à l'ombilic opposé, on voit aisément que l'angle ω doit alors être droit [*]. On peut donc faire à la fois

$$\mu = c, \quad \nu = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2},$$

et de la résulte $C = 0$. Ainsi, l'équation de la ligne géodésique OP peut s'écrire définitivement de la manière suivante :

$$(2)\quad \int_c^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} + \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

L'équation de la ligne géodésique O'P qui passe par l'ombilic O' sera de même

$$(3)\quad \int^\mu \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} - \int_0^\nu \frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{c^2-b^2}}\log\operatorname{tang}\frac{\omega'}{2}.$$

Le signe de la seconde intégrale est changé, et l'angle ω ou POO' est remplacé par PO'O ou ω'.

Les équations (2) et (3), combinées par addition et par soustraction, en fournissent deux autres, l'une entre μ, ω, ω', l'autre entre ν, ω, ω'.

---

[*] J'ai déjà fait cette remarque dans une Lettre à M. Liouville (tome XII de ce Journal, page 491), et j'en ai conclu qu'on peut passer sur l'ellipsoïde d'une des extrémités de l'axe moyen à l'autre par trois chemins géodésiques distincts dont les longueurs sont les demi-circonférences des sections principales de la surface. Il est bon d'ajouter que cette dernière proposition se lie à une certaine propriété de deux points D, D' situés aux deux extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipsoïde. En effet, si l'on joint le point D à un ombilic O par une ligne géodésique, cette ligne qui passera également par l'ombilic opposé O'' devra évidemment passer aussi par le point D'; et il est clair que la distance géodésique DD' sera égale à OO'', c'est-à-dire à la demi-circonférence de la section principale perpendiculaire à l'axe moyen. A ce chemin géodésique de D à D' s'ajoutera un second chemin sur une section principale perpendiculaire au grand ou au petit axe, si D et D' sont situés sur une telle section, et même deux chemins, si D et D' sont sur les deux sections à la fois, c'est-à-dire sont aux extrémités de l'axe moyen. Voilà bien ce que nous avions trouvé d'abord en discutant séparément ce dernier cas.

En supposant μ ou ν constante, on a ainsi la relation qui doit exister aux divers points d'une même ligne de courbure entre les angles ω, ω'. Cela conduit aux théorèmes suivants :

I. Soient O, O' les ombilics dont nous venons de parler, et P un point tel que

$$\operatorname{tang}\frac{\mathrm{POO'}}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\mathrm{PO'O}}{2} = \text{constante [*]},$$

le lieu de P sera une des lignes de courbure données par l'équation

$$\mu = \text{constante}.$$

II. Si nous avons

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{POO'}}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{PO'O}}{2}} = \text{constante},$$

le lieu géométrique de P sera une des lignes de courbure données par l'équation

$$\nu = \text{constante}.$$

De là résultent de nombreux corollaires. Par exemple :

III. Si une ligne géodésique qui passe par l'ombilic O rencontre aux points P, P' une ligne de courbure donnée (μ), on aura

$$\operatorname{tang}\frac{\mathrm{PO'O}}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\mathrm{P'O'O}}{2} = \text{constante}.$$

IV. Si une ligne géodésique qui passe par l'ombilic O rencontre aux points P, P' une ligne de courbure donnée (ν), on aura

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{PO'O}}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\mathrm{P'O'O}}{2}} = \text{constante}.$$

V. Si l'on joint un point P d'une ligne de courbure aux deux ombilics O, O' par deux lignes géodésiques qui rencontrent de nouveau

[*] Tous ces angles sont formés sur la surface par les lignes géodésiques.

la ligne de courbure respectivement aux points P′, P″, le lieu du point d'intersection Q des lignes géodésiques OP″, O′P′ sera aussi une ligne de courbure de la même espèce.

VI. Si l'on tire d'un point P deux lignes géodésiques qui passent par les ombilics O, O′, et qui rencontrent une ligne de courbure donnée respectivement aux points Q, Q′, R, R′; si, en outre, P se meut sur une ligne de courbure de la même espèce que la première, l'intersection S des lignes OR, O′Q, et celle S′ des lignes OR′, O′Q′, décriront deux lignes de courbure de la même espèce.

Il suit de là que si nous joignons un point P, pris sur une ligne de courbure, aux deux ombilics O et O′, par deux lignes géodésiques qui rencontrent la courbe une seconde fois aux points Q, Q′, et que nous tirions ensuite les lignes géodésiques O′Q, OQ′ qui rencontrent une seconde fois la ligne de courbure respectivement aux points R, R′, les intersections de OQ′, O′Q et de OR, O′R′ décriront deux lignes de courbure de même espèce que la première. Et comme cette construction peut se continuer *ad infinitum* en prolongeant encore OR, O′R′ jusqu'en S et S′ sur la ligne de courbure primitive, puis joignant OS′, O′S, etc., nous pouvons faire dériver d'une ligne de courbure donnée une suite infinie de lignes de même espèce. Si nous désignons par μ, μ', μ'',..., $\mu^{(n)}$,..., les constantes de ces lignes, nous obtiendrons facilement

$$\int_c^{\mu^{(n)}} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}} = (2n+1)\int_c^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}};$$

ce qui fournit une construction géométrique pour la multiplication, par un nombre impair, de l'intégrale

$$\int_c^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2 - b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}\ [*].$$

---

[*] Ce théorème, appliqué au cas des coniques planes, donne une traduction géométrique de quelques résultats dans la théorie des fonctions elliptiques. Par exemple, ayant fait dériver d'une ellipse donnée une suite d'ellipses homofocales par la construction indiquée dans le texte, cherchons le produit des excentricités de toutes ces ellipses. Pour cela, soit $\tang\frac{\omega}{2}\tang\frac{\omega'}{2} = m$ pour la première courbe; les quantités analogues

Nos formules conduisent à une fonction qui doit remplacer la fonction sinus, pour un arc géodésique $OP = \rho$ issu de l'ombilic O et terminé à un point (μ, ν). Cette fonction, que nous désignerons par P, sera définie par l'équation

$$ds^2 = d\rho^2 + P^2 d\omega^2,$$

qui peut être considérée comme une formule pour la rectification des courbes tracées sur la surface de l'ellipsoïde, et qui sont déterminées par une relation entre le rayon vecteur géodésique ρ et l'angle ω.

Si la courbe est une des lignes de courbure dont l'équation est

$$\mu = \text{constante},$$

on a, par les expressions connues,

$$ds^2 = \frac{(\mu^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} d\nu^2, \quad d\rho^2 = \frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2} d\nu^2 \text{ [*]},$$

et, par l'équation (2),

$$\frac{d\nu}{b^2 - \nu^2}\sqrt{\frac{a^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{c^2 - b^2}}\frac{d\omega}{\sin\omega};$$

de là nous tirons, pour P^2, l'expression suivante,

$$P^2 = \frac{(a^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}{b^2(c^2 - b^2)\sin^2\omega},$$

qui détermine P.

---

pour les autres seront m^3, m^5, $m^7, \ldots$, et en désignant par ε, ε', $\varepsilon'', \ldots$ les excentricités des courbes qui forment la suite, on aura

$$\varepsilon = \frac{1 - m}{1 + m}, \quad \varepsilon' = \frac{1 - m^3}{1 + m^3}, \quad \varepsilon'' = \frac{1 - m^5}{1 + m^5}, \ldots.$$

On a donc

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' \ldots = \frac{1 - m}{1 + m} \cdot \frac{1 - m^3}{1 + m^3} \cdot \frac{1 - m^5}{1 + m^5} \ldots;$$

en sorte que si l'on pose $m = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, K, K' étant les fonctions complètes à modules complémentaires k, k', il viendra, par une formule connue,

$$\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' \ldots = \sqrt[4]{k'}.$$

[*] *Voir* tome IX, page 402, et tome XI, page 3

On voit donc que

$$P \sin \omega = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}.$$

Mais cette dernière quantité exprime la distance du point (μ, ν) au plan qui contient les ombilics, ou, en d'autres termes, est l'y de ce point dans le système ordinaire des coordonnées rectangulaires [*]. Elle ne changera pas si, au lieu de l'ombilic O et de la fonction P, on considère l'ombilic O' et une fonction P' qui soit pour un arc partant de ce dernier ombilic ce que P est pour l'arc ρ. On a donc

$$P \sin \omega = y = P' \sin \omega',$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{\sin \omega'}{\sin \omega},$$

équation analogue à celles qui, dans la trigonométrie plane ou sphérique, expriment que les côtés ou les sinus des côtés d'un triangle sont entre eux comme les sinus des angles opposés.

Nous avons aussi le théorème suivant, qui pourra être utile :

Si nous menons par l'ombilic O deux lignes géodésiques infiniment voisines, l'arc infiniment petit qui les coupe sous un angle droit a pour expression $y\,\frac{d\omega}{\sin \omega}$, y se rapportant à l'une quelconque des extrémités de cet arc.

Si nous voulons exprimer la fonction P par les coordonnées elliptiques, nous poserons

$$M = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\int_c^{\mu}\frac{d\mu}{\mu^2-b^2}\sqrt{\frac{a^2-\mu^2}{c^2-\mu^2}}}, \quad N = e^{b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}\int_0^{\nu}\frac{d\nu}{b^2-\nu^2}\sqrt{\frac{a^2-\nu^2}{c^2-\nu^2}}},$$

et nous aurons, par l'équation (1),

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = MN$$

ou

$$\sin \omega = \frac{2MN}{1+M^2N^2},$$

---

[*] *Voir* tome XI, page 218.

d'où

$$P = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}\,\frac{(1+M^2N^2)}{2MN}.$$

La fonction P′ relative à l'arc qui passe par l'autre ombilic s'obtiendra en substituant $\frac{1}{N}$ à N dans l'expression de P ; ce qui donne

$$P' = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{(a^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{c^2-b^2}}\,\frac{(M^2+N^2)}{2MN}.$$

Ces formules deviennent illusoires si l'arc géodésique coïncide avec la section principale qui contient les ombilics. Mais on pourrait obtenir une expression de P délivrée de toute ambiguïté, en faisant usage des fonctions H, Θ introduites dans l'analyse avec tant de succès par M. Jacobi. L'emploi de ces fonctions présentera d'ailleurs, sous plusieurs points de vue, des avantages que nous développerons dans un autre article.

Addition au Mémoire précédent.

Je me propose, dans cette Addition, de mettre l'équation intégrale d'une ligne géodésique quelconque sur un ellipsoïde sous une forme analogue à celle que j'ai donnée pour les lignes géodésiques qui passent par un ombilic. Pour fixer les idées, je supposerai qu'il s'agisse d'une ligne géodésique tangente à une des lignes de courbure représentées par l'équation

$$\mu = \text{constante} = \sqrt{\beta}.$$

L'équation de cette ligne géodésique sera

$$\text{(A)}\quad \int_{\sqrt{\beta}}^{\mu} \frac{\sqrt{a^2-\mu^2}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-\beta)(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} \pm \int_{b}^{\nu} \frac{\sqrt{a^2-\nu^2}\,d\nu}{\sqrt{(\beta-\nu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} = \alpha :$$

et si nous désignons par ω l'angle qu'elle forme avec la section principale qui contient les ombilics, l'équation de M. Liouville donne la relation suivante entre ω et la valeur de μ au point où notre ligne géodésique va rencontrer la section ombilicale :

$$\mu^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega = \beta,$$

d'où

$$\mu^2 = \beta + (\beta - b^2) \operatorname{cotang}^2 \omega.$$

Nous obtiendrons donc la valeur de α en fonction de ω, en posant dans l'équation de la ligne géodésique

$$\nu = b, \quad \mu = \sqrt{\beta + (\beta - b^2) \operatorname{cotang}^2 \omega}.$$

Cela donne

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\frac{a^2 - \beta}{c^2 - \beta}} \int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\beta - b^2}{a^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}{1 - \dfrac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}} \, \frac{\operatorname{cosec} \omega d\omega}{\sqrt{1 + \dfrac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}}.$$

En observant que le double signe contenu dans l'équation (A) provient des deux lignes géodésiques qu'on peut mener par un point (μ, ν) tangentiellement à la ligne de courbure, le signe $+$ se rapportant à l'une de ces lignes géodésiques et le signe $-$ à l'autre, on déduit de cette expression le théorème suivant :

Si deux lignes géodésiques menées d'un quelconque des points d'une ligne de courbure tangentiellement à une autre ligne de courbure de la même espèce, font avec la section ombilicale les angles ω et ω', on a

$$\int_{\omega}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\beta - b^2}{a^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}{1 - \dfrac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}} \, \frac{\operatorname{cosec} \omega d\omega}{\sqrt{1 + \dfrac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega}}$$

$$- \int_{\omega'}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 - \dfrac{\beta - b^2}{a^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}{1 - \dfrac{\beta - b^2}{c^2 - \beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}} \, \frac{\operatorname{cosec} \omega' d\omega'}{\sqrt{1 + \dfrac{\beta - b^2}{\beta} \operatorname{cotang}^2 \omega'}} = \text{constante}.$$

Cette relation peut être regardée comme une généralisation du théorème I ci-dessus.

On a aussi le théorème suivant :

Si l'on tire des deux points P, Q pris sur la même ligne de courbure deux paires de tangentes géodésiques PT, PT′, QR, QR′, à une autre ligne de courbure de la même espèce TT′RR′ (T, T′, R, R′ sont les points de contact), et que l'intersection des lignes PT et QR′ décrive une ligne de courbure de même espèce que la première, l'intersection des lignes PT′ et QR décrira aussi une autre ligne de même espèce.