JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

DIGUET, C-F

Note à l'occasion de l'article précédent.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 83-86.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A12_0>

Note de M. **Diguet.**

Par un point A d'une surface, on mène différentes lignes géodésiques, telles que AM, sur lesquelles on prend une longueur constante infiniment petite $AM = s$. Le lieu des points M forme une courbe fermée infiniment petite, dont je vais calculer la longueur et l'aire.

Les équations différentielles de la ligne géodésique AM sont, comme on sait,

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} + p\frac{d^2z}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} + q\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Et si l'on développe en série les équations de cette courbe, en prenant l'arc pour variable indépendante, on aura

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$y = y_0 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{6} + \ldots,$$

$$z = z_0 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \ldots.$$

L'équation de la surface donne

$$\frac{dz}{ds} = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = p\frac{d^2x}{ds^2} + q\frac{d^2y}{ds^2} + r\frac{dx^2}{ds^2} + 2u\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + t\frac{dy^2}{ds^2};$$

on trouve d'ailleurs, en différentiant les équations (1),

$$\frac{d^3x}{ds^3} + p\frac{d^3z}{ds^3} + \left(r\frac{dx}{ds} + u\frac{dy}{ds}\right)\frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$\frac{d^3y}{ds^3} + q\frac{d^3z}{ds^3} + \left(u\frac{dx}{ds} + t\frac{dy}{ds}\right)\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Cela posé, je prends pour axes de coordonnées les tangentes aux sections normales principales et la normale au point A. J'appelle α l'angle que la tangente en A à la ligne AM fait avec l'axe des x.

J'aurai alors, à cause des équations précédentes et de ce choix de coordonnées,

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0,$$
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_0 = \cos\alpha, \quad \left(\frac{dy}{ds}\right)_0 = \sin\alpha, \quad \left(\frac{dz}{ds}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)_0 = r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha,$$
$$\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)_0 = -r(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\cos\alpha,$$
$$\left(\frac{d^3y}{ds^2}\right)_0 = -t(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\sin\alpha.$$

Les équations de la ligne AM deviennent donc

$$(2)\quad \begin{cases} x = s\cos\alpha - \frac{s^3}{6}r(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\cos\alpha + \ldots, \\ y = s\sin\alpha - \frac{s^3}{6}t(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha)\sin\alpha + \ldots, \\ z = \frac{s^2}{2}(r\cos^2\alpha + t\sin^2\alpha) + \ldots. \end{cases}$$

Si maintenant je suppose que s soit constant et égal à la longueur infiniment petite assignée précédemment, et que je regarde α comme variable indépendante, ces équations seront celles de la courbe infiniment petite demandée.

Soit σ la longueur de cette courbe, on aura

$$d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Substituant les valeurs de dx, dy, dz tirées des équations (2), et faisant les réductions convenables, on trouve

$$d\sigma = d\alpha . s\sqrt{1 - \frac{rts^2}{3} + \ldots},$$

et en développant le radical d'après la formule du binôme,

$$d\sigma = d\alpha . s\left(1 - \frac{rts^2}{6} + \ldots\right),$$

d'où

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi r t s^3}{6} + \ldots,$$

ou bien

$$\sigma = 2\pi s - \frac{2\pi s^3}{6 R_1 R_2} + \ldots,$$

R_1, R_2 désignant les rayons de courbure principaux.

Soit λ l'aire de cette courbe, on aura

$$d\lambda = dx dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

je pose

$$V = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

V est une fonction de x et de y. J'aurai donc

$$V = V_0 + \left(\frac{dV}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 y$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)_0 xy + \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 y^2\right] + \ldots.$$

Or on reconnaît aisément que

$$V_0 = 1,$$
$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dV}{dy}\right)_0 = 0,$$
$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) = r^2, \quad \left(\frac{d^2V}{dx dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_0 = t^2.$$

Il en résulte

$$V = 1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2);$$

donc

$$d\lambda = dx dy\left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2)\right],$$

et, par suite, x_0, x_1 désignant les valeurs extrêmes de x,

$$\lambda = 2\int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^y dy\left[1 + \frac{1}{2}(r^2 x^2 + t^2 y^2)\right],$$
$$\lambda = 2\int_{x_0}^{x_1} dx\left[y + \frac{1}{2}\left(r^2 x^2 + \frac{t^2 y^2}{3}\right) y\right].$$

Je prends α pour variable indépendante, et je calcule

$$ydx + \frac{1}{2}\left(r^2 x^2 + \frac{t^2 y^2}{3}\right) ydx$$

en fonction de cette variable au moyen des équations (2), et je trouve, en négligeant toujours les puissances de s supérieures à la quatrième, que cette quantité est égale à

$$-s^2 \sin^2\alpha\, d\alpha + \frac{s^4 \sin^2\alpha}{6 R_1 R_2}(1 - 2\cos^2\alpha).$$

Si donc on remarque que les valeurs de α correspondant aux limites x_0 et x_1 sont π et 0, puis si l'on renverse les limites, on aura enfin

$$\lambda = 2s^2 \int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha - \frac{s^4}{3R_1R_2}\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha + \frac{2s^4}{3R_1R_2}\int_0^\pi \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha.$$

Or

$$\int_0^\pi \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^2\alpha \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{8}.$$

Donc

$$\lambda = \pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 R_1 R_2}.$$

C. Q. F. T.