BERTRAND, J.

Démonstration d'un théorème de M. Gauss.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 80-82.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1848_1_13_A11_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. GAUSS;

Par M. J. BERTRAND.

(Avec une Note de M. Diguet, élève à l'École Normale.)

M. Liouville a publié récemment une démonstration du théorème important de M. Gauss, qui consiste en ce qu'une surface étant donnée, si on la suppose flexible, mais inextensible, quelle que soit la manière dont on la déforme, le produit des rayons de courbure restera invariable en chaque point. Cette démonstration, quoique très-élégante, étant peut-être un peu trop longue pour qu'on puisse l'introduire dans l'enseignement, j'ai cru faire une chose utile en cherchant à la simplifier autant que possible. Les raisonnements auxquels j'ai été conduit diffèrent complétement de ceux qui ont été employés jusqu'ici; le résultat auquel je parviens n'est, il est vrai, qu'un cas particulier de la solution du problème général résolu par M. Gauss; mais ce cas particulier suffit pour la démonstration complète du beau théorème que je viens d'énoncer.

Considérons sur la surface un point O, et soient R_1, R_2 les deux rayons de courbure principaux de la surface en ce point. Concevons un fil infiniment petit dont l'une des extrémités soit fixée en O et qui tourne en restant tendu sur la surface; l'autre extrémité de ce fil décrira une courbe dont la longueur ne variera pas quand on viendra à déformer la surface, et qui, de plus, pourra être considérée comme décrite sur la surface transformée de la même manière qu'elle l'avait été sur la surface primitive et à l'aide d'un fil de même longueur. Nous allons calculer le périmètre total de cette courbe, et nous verrons qu'il ne peut rester constant que si le produit $R_1 R_2$ est lui-même invariable.

Je remarquerai d'abord que si l'on considère les diverses lignes géodésiques passant par le point O, chacune d'elles a un contact du second ordre avec la section normale correspondante, et, par suite, même rayon de courbure; en sorte que le rayon de celle de ces courbes qui fait avec la section principale l'angle ω sera donné par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_2} \cos^2 \omega.$$

Soit s la longueur infiniment petite du fil qui a servi à tracer la courbe en question, il est évident que si l'on projette cette courbe sur le plan tangent en O, on obtiendra une ligne dont les rayons vecteurs seront les sinus d'arcs égaux à s dans des cercles ayant pour rayons les diverses valeurs de R; et en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, on aura

$$\rho = s - \frac{s^3}{6R^2}.$$

L'élément de longueur de cette projection sera donné par la formule

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2,$$

ou, en négligeant $d\rho^2$ qui contient en facteur la sixième puissance de s,

$$dl^2 = \left(s - \frac{s^3}{6R^2}\right)^2 d\omega^2 = s^2 d\omega^2 - \frac{s^4 d\omega^2}{3R^2} = s^2 d\omega^2 - \frac{s^4 d\omega^2}{3}\left(\frac{1}{R_1} \sin^2 \omega + \frac{1}{R_1} \cos^2 \omega\right)^2;$$

l'élément de la courbe elle-même sera donné par la formule

$$d\sigma^2 = dl^2 + dz^2,$$

z étant la distance des différents points de cette courbe au plan tangent en O. Or cette distance est, en négligeant les infiniment petits du quatrième ordre,

$$z = \frac{s^2}{2R};$$

on a donc

$$dz^2 = \frac{s^4}{4}\left(d\,\frac{1}{R}\right)^2 = \frac{s^4}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \sin^2 2\omega\, d\omega^2.$$

ce qui donne

$$d\sigma^2 = s^2 d\omega^2 + s^4 d\omega^2 \left\{ \begin{aligned} &- \frac{1}{3}\left(\frac{1}{R_1}\sin^2\omega + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega\right)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \sin^2 2\omega\, d\omega^2 \end{aligned} \right\},$$

d'où l'on tire, en extrayant la racine carrée, et négligeant les puissances de s supérieures à la quatrième,

$$d\sigma = s d\omega + s^3 d\omega \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{6R_1^2}(3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega) \\ &+ d\omega\, \frac{1}{6R_2^2}(3\cos^2\omega - 4\cos^4\omega) \\ &- \frac{4}{3R_1R_2}\sin^2\omega\cos^2\omega \end{aligned} \right\}.$$

En intégrant de o à 2π, et remarquant que

$$\int_0^{2\pi}(3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega)\, d\omega = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}(3\cos^2\omega - 4\cos^4\omega)\, d\omega = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\omega\cos^2\omega\, d\omega = \frac{\pi}{4},$$

on trouve

$$\sigma = 2\pi s - \frac{\pi s^3}{3R_1R_2}.$$

Cette expression ne dépendant que de $R_1 R_2$, et σ ne devant pas changer quand on déforme la surface, le produit $R_1 R_2$ doit lui-même rester invariable; ce qui est précisément le théorème de M. Gauss.

Dans la déformation de la surface, le contour que nous venons de calculer doit non-seulement conserver la même longueur, mais il doit en être de même de l'aire renfermée dans ce contour. M. Diguet, élève de l'École Normale, à qui j'avais fait cette remarque, m'a remis le calcul suivant, qui conduit à l'expression de cette surface infiniment petite, et peut fournir, par conséquent, une nouvelle démonstration du théorème de M. Gauss.