JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 21-24.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1846_1_11_A3_0>

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE

RELATIVE

A L'ÉQUATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES

SUR LES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR J. LIOUVILLE.

Cette démonstration, que j'ai communiquée à l'Académie dans sa séance du 19 janvier dernier (*Comptes rendus,* t. XXII, p. 111), me paraît à la fois directe et rapide. Elle est fondée sur les propriétés les plus simples des *tangentes conjuguées* que M. Ch. Dupin a introduites avec tant de succès dans les recherches géométriques. On l'applique ici spécialement à l'ellipsoïde pris pour type général des surfaces du second degré.

Soient M, M' deux points consécutifs d'une ligne géodésique tracée sur un ellipsoïde; MT, M'T' les tangentes de la courbe en ces points; et MS, M'S' les tangentes conjuguées, dont les directions diffèrent infiniment peu de celle de l'intersection des deux plans tangents SMT, S'M'T'. Menons par le centre O de l'ellipsoïde, et parallèlement à ces diverses droites, les demi-diamètres OD, OD', OE, OE', OI; OI sera l'intersection de deux plans EOD, E'OD' parallèles aux deux plans tangents SMT, S'M'T', et différera infiniment peu des parallèles OE, OE' aux tangentes MS, M'S'. D'après un théorème connu, OD et OE, OD' et OE' seront deux systèmes de demi-diamètres conjugués pour les sections faites dans la surface par les plans EOD, E'OD'. Par suite, les droites IE, IE', qui diffèrent infiniment peu des tangentes à ces sections en E et E', seront sensiblement parallèles, l'une à OD, l'autre à OD'. Ainsi, en négligeant les infiniment petits du second ordre, ce que nous ferons dans tout ce qui va suivre, les perpendiculaires abaissées des points E et E' sur les droites

OD et OD′, sont respectivement égales à celles abaissées du point I sur ces mêmes droites. On conclut aisément de là qu'elles sont égales entre elles. En effet, par la propriété fondamentale de la ligne géodésique, le plan DOD′, sensiblement parallèle au plan osculateur de cette ligne en M, doit couper le plan tangent SMT, et conséquemment le plan EOD ou IOD, sous un angle infiniment peu différent de 90 degrés; il s'ensuit que les perpendiculaires abaissées du point I sur OD et OD′ font aussi avec le plan DOD′ des angles infiniment peu différents de 90 degrés; ce qui suffit pour établir la proposition énoncée.

En désignant donc par H et H′ les perpendiculaires abaissées des points E, E′ sur les droites respectives OD, OD′, on a, abstraction faite des infiniment petits du second ordre, $H' - H = 0$; en d'autres termes, on a, pour le lieu des points E,

$$dH = 0 \quad \text{et} \quad H = \text{constante}.$$

De là ce théorème: *Si parallèlement à la tangente en un point quelconque* M *d'une ligne géodésique donnée et à la tangente conjuguée, on conçoit deux demi-diamètres de l'ellipsoïde, la perpendiculaire* H *abaissée de l'extrémité du second de ces demi-diamètres sur le premier sera constante.*

La même propriété appartient, du reste, aux lignes de courbure; elle résulte alors de ce que la tangente à une de ces lignes est toujours perpendiculaire à sa conjuguée; ce qui rend la droite OI, dont on a parlé plus haut, sensiblement perpendiculaire aux deux droites OD, OD′, en sorte que les perpendiculaires H, H′ doivent être regardées comme égales à OI et partant comme égales entre elles.

Soient P la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent en M, et D la longueur du demi-diamètre OD. On sait que le produit PDH est constant et égal au produit des trois demi-axes principaux. Donc, le long d'une ligne géodésique, ou d'une ligne de courbure, on a aussi

$$PD = \text{constante}.$$

C'est l'équation de M. Joachimsthal. Un calcul facile conduit de même à notre équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{constante}.$$

En conservant, en effet, les notations de l'article inséré dans le tome IX de ce Journal, p. 401, on trouve, pour les demi-axes principaux D_2, D_1 de l'ellipse EOD $\left(\text{lesquels sont parallèles aux tangentes des lignes de courbure en M, et font avec COD les angles respectifs } i, \frac{\pi}{2} - i\right)$, les expressions suivantes: $D_2 = \sqrt{\rho^2 - \nu^2}$, $D_1 = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}$; par les propriétés des diamètres conjugués, nous avons dès lors

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{\rho^2 - \nu^2} + \frac{\sin^2 i}{\rho^2 - \mu^2}, \quad HD = \sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2};$$

et par suite

$$H^2 = \rho^2 - \mu^2 \cos^2 i - \nu^2 \sin^2 i.$$

Or, à l'aide de cette formule, on transforme à volonté l'une dans l'autre nos deux équations.

Observons aussi que, sans rien changer aux principes essentiels de la démonstration donnée ci-dessus de l'équation $H = \text{constante}$, on pourrait la présenter sous une forme encore plus concise peut-être, en s'appuyant sur l'égalité des angles que deux éléments consécutifs de la ligne géodésique font avec l'intersection des plans tangents à l'ellipsoïde menés par ces deux éléments, ce qui entraîne l'égalité des angles que la droite OI parallèle à l'intersection fait avec les demi-diamètres OD, OD′ parallèles aux deux éléments: l'égalité des perpendiculaires abaissées du point I sur OD et OD′ en résulte immédiatement.

Si la ligne MM′ était une ligne quelconque tracée sur la surface de l'ellipsoïde, les perpendiculaires abaissées du point I ne seraient plus égales, et l'on n'aurait plus $dH = 0$. L'expression générale de la différentielle dH est assez remarquable. Soient θ l'angle que la droite OI fait avec OD, et $\theta + d\varepsilon$ l'angle qu'elle fait avec OD′. On a $H = OI.\sin\theta$, $H' = OI.\sin(\theta + d\varepsilon)$; donc

$$\frac{dH}{H} = \text{cotang}\,\theta\, d\varepsilon.$$

On peut, dans cette équation, prendre pour θ l'angle EOD ou SMT; quant à $d\varepsilon$, c'est évidemment l'angle que forment entre eux deux éléments consécutifs de la courbe plane dans laquelle la courbe MM′ se transforme lorsqu'on applique sur un plan la surface développable lieu des tangentes conjuguées MS, M′S′.

On a $d\varepsilon = 0$ le long d'une ligne géodésique, et cotang $\theta = 0$ le long d'une ligne de courbure; dans ces deux cas, et dans ces deux-là seulement, $d\mathrm{H} = 0$. Mais l'équation

$$\frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{H}} = \operatorname{cotang} \theta \, d\varepsilon$$

peut être utile dans d'autres circonstances; il est clair, par exemple, qu'elle s'intègre quand on a $d\varepsilon = f(\theta)\, d\theta$, et que par suite elle peut servir à la détermination des courbes dont la propriété fondamentale s'exprimerait par une formule du genre de celle que nous venons d'écrire.

Puisque θ désigne à présent l'angle des deux demi-diamètres conjugués OE, OD de l'ellipse EOD, les valeurs de ces demi-diamètres sont

$$\frac{\mathrm{H}}{\sin\theta}, \quad \frac{\mathrm{D}_1 \mathrm{D}_2}{\mathrm{H}}.$$

La somme de leurs carrés doit être égale à celle des carrés des demi-axes principaux D_1, D_2. De là une équation entre H, D_1, D_2 et θ. Cette équation fournit

$$\operatorname{cotang} \theta = \frac{\sqrt{(\mathrm{H}^2 - \mathrm{D}_1^2)(\mathrm{D}_2^2 - \mathrm{H}^2)}}{\mathrm{H}^2} = \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sin 2i}{2\mathrm{H}^2},$$

en ayant égard aux valeurs de D_1^2, D_2^2, H^2 données ci-dessus. Cette formule pourra être quelquefois utile.