ROBERTS, MICHAEL

Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 1-4.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1846_1_11_A1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES GÉODÉSIQUES

ET

DES LIGNES DE COURBURE DE L'ELLIPSOÏDE;

PAR M. MICHAEL **ROBERTS** [*].

M. Jacobi a le premier trouvé l'intégrale de l'équation différentielle du second ordre relative à la ligne géodésique sur un ellipsoïde à trois axes inégaux. Divers géomètres, et en particulier M. Liouville dans le tome IX de son *Journal de Mathématiques* (page 401), ont ensuite donné sous différentes formes les détails de la démonstration que M. Jacobi avait supprimée. J'ai tiré des formules de M. Liouville quelques conséquences intéressantes que je vais indiquer ici.

Je conserve les notations employées par M. Liouville dans le Mémoire dont j'ai parlé. Cela posé, l'équation

$$\frac{m\,d\mu^2}{n\,d\nu^2} = \frac{\mu^2 - \beta}{\beta - \nu^2}$$

est l'équation différentielle d'une ligne géodésique tangente à la ligne

[*] C'est le Mémoire que nous annoncions dans le dernier cahier et dont les résultats ont été communiqués à l'Académie des Sciences dans la séance du 29 décembre 1845. (*Voir* le tome X de ce Journal, p. 466.) (J. LIOUVILLE.)

de courbure déterminée par l'équation $\beta = \mu^2$, si l'on a $\beta > b^2$, et par l'équation $\beta = \nu^2$, si $\beta < b^2$.

En effet, en se rappelant l'équation

$$\beta = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i,$$

on a, pour le point de contact, $i = 0$, ou $i = \frac{\pi}{2}$, selon que $\beta > b^2$ ou $\beta < b^2$.

Il s'ensuit que pour toutes les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de courbure, la quantité β conserve une valeur constante. Si une ligne géodésique passe par un des ombilics (points pour lesquels on a $\mu^2 = \nu^2 = b^2$), nous aurons $\beta = b^2$, quelle que soit sa direction.

Si deux lignes géodésiques, tangentes à la même ligne de courbure, se rencontrent en un point (μ, ν), elles feront de part et d'autre des angles égaux avec les lignes de courbure qui passent par le point (μ, ν). Car on a

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu^2 \cos^2 i' + \nu^2 \sin^2 i',$$

d'où

$$i = i';$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si des ombilics situés aux côtés opposés de l'axe *minimum* au-dessus du plan des x, y, on mène deux lignes géodésiques à un même point de la ligne de courbure dont l'équation est $\mu =$ constante, leur somme sera invariable le long de la ligne de courbure.

En effet, si nous désignons par t, t' les deux rayons, nous aurons

$$dt = ds'' \cos i, \quad dt' = - ds'' \cos i,$$

ce qui donne

$$t + t' = \text{constante.}$$

Cherchons l'équation de la ligne de courbure, en employant pour coordonnées les quantités t, ν. Pour cela, l'équation

$$b^2 = \mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i$$

donne

$$\cos i = \sqrt{\frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}}.$$

d'où, en se rappelant les formules de M. Liouville,

$$dt = \sqrt{q}\, d\nu \sqrt{\frac{b^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2}},$$

ou

$$dt = \sqrt{\frac{\rho^2 - \nu^2}{c^2 - \nu^2}}\, d\nu;$$

de là résulte

$$t = \mathrm{C} + \rho\,\mathrm{E}\left(\frac{c}{\rho}, \varphi\right),$$

en posant $\nu = c \sin \varphi$.

Si l'on désigne par $\rho\,\mathrm{E}\left(\frac{c}{\rho}, \alpha\right)$ l'arc de la section principale qui sert pour le plan des x, z, terminé par l'extrémité de l'axe *minimum* de l'ellipsoïde, et par la ligne de courbure dont il s'agit, nous aurons

$$\mathrm{C} = \rho\,\mathrm{E}\left(\frac{c}{\rho}, \alpha\right);$$

on aura donc enfin

$$t = \rho\,[\mathrm{E}(\alpha) + \mathrm{E}(\varphi)], \quad t' = \rho\,[\mathrm{E}(\alpha) - \mathrm{E}(\varphi)].$$

Il est facile de voir que les lignes de courbure jouissent aussi des propriétés analogues à la propriété fondamentale de l'hyperbole.

Si deux lignes géodésiques, tangentes aux deux lignes de courbure qui répondent aux valeurs β, β' de la constante, passent par un point (μ, ν) et se coupent à angle droit, on aura évidemment

$$\beta + \beta' = \mu^2 + \nu^2.$$

Il s'ensuit que si deux lignes géodésiques sont tangentes à deux lignes de courbure données, et se coupent à un angle droit, le lieu de leur intersection sera une sphéro-conique. Car, par une propriété connue de l'ellipsoïde, la distance du centre de la surface au point (μ, ν) sera constante.

Remarquons encore que toutes les lignes géodésiques qui passent par un ombilic passent aussi par l'ombilic opposé, et que leur longueur entre ces deux extrémités reste la même, indépendamment de leur direction.

Je finirai en citant un théorème de géométrie dû à M. Mac-Cullagh, qui a quelques rapports avec le sujet que je viens d'indiquer :

« Les lignes de courbure de l'ellipsoïde se projettent sur les plans » des sections circulaires, par des droites parallèles à l'axe *minimum* » de la surface, en coniques homofocales ayant pour foyers les pro- » jections des ombilics. Les sphéro-coniques se projettent pareillement » en cercles concentriques. »

P. S. J'ajouterai ici une remarque relative à l'analogie qui existe entre les coniques homofocales et les lignes de courbure de l'ellipsoïde. Pour cela, il faudra se rappeler cette propriété connue :

« Si deux coniques homofocales passent par un point, les rayons » (t, t') tirés des foyers à ce point seront donnés par les formules

$$t = a + a', \quad t' = a - a',$$

» où a et a' sont les demi-axes focaux des coniques. »

Or, si l'on tire des ombilics deux rayons à un point d'intersection de deux lignes de courbure, on a encore

$$t = a + a', \quad t' = a - a',$$

en désignant cette fois par a et a' les demi-axes *ombilicaux elliptiques* des lignes de courbure [*].

---

[*] Aux théorèmes que vient de citer M. Michael Roberts, je prendrai la liberté d'ajouter le suivant : Si d'un point quelconque M d'une ligne de courbure donnée MM' on mène deux arcs géodésiques tangents à deux autres lignes de courbure données aussi, le rapport des sinus des angles que ces deux arcs géodésiques forment au point M avec la ligne de courbure MM' sera constant. Ce théorème se tire immédiatement des formules que j'ai données, et l'on en déduit en même temps pour le triangle géodésique inscrit dans une ligne de courbure une propriété analogue à celle du triangle ordinaire inscrit dans l'ellipse plane. Au reste, l'étude approfondie des lignes courbes tracées sur l'ellipsoïde conduit à une foule de résultats curieux. J'y reviendrai avec détail dans une autre occasion. (J. LIOUVILLE.)