JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LEBESGUE, V.-A.

Mémoire sur une formule de Vandermonde et son application à la démonstration d'un théorème de M. Jacobi.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 17-35.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1841_1_6_A3_0>

MÉMOIRE

SUR UNE FORMULE DE VANDERMONDE,

ET SON APPLICATION

A LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. JACOBI;

PAR M. V.-A. LEBESGUE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 18 février 1839.)

L'objet principal des pages suivantes est 1° la démonstration de l'équation identique

$$y\sum_{i=0}^{i=n}\frac{d^i\,A_i\dfrac{d^i(ty)}{dx^i}}{dx^i}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{d^i B_i\dfrac{d^i t}{dx^i}}{dx^i},$$

où A_i, y et t sont des fonctions quelconques de x, et

$$B_i\,(B_0,\, B_1,\, B_2,\ldots B_n)$$

des fonctions de $A_i\,(A_0,\, A_1,\ldots A_n)$, y et de leurs coefficients différentiels; 2° la recherche de la loi des fonctions B_i.

Le cas de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{d^i.A_i\dfrac{d^i y}{dx^i}}{dx^i}=0,$$

prise pour déterminer y, donne un théorème dont M. Jacobi a montré l'application au calcul des variations [*].

La seule difficulté de la vérification directe de l'équation identique provient du grand nombre de termes fournis par les différentiations successives de produits de deux ou trois facteurs fonctions de x. Le moyen que nous avons employé pour y remédier, nous a donné pour

[*] Voyez tome III de ce Journal, page 47.

terme général des fonctions B_i,

$$\pm M \frac{d^\alpha . A_n}{dx^\alpha} \cdot \frac{d^\beta . y}{dx^\beta} \cdot \frac{d^\gamma . y}{dx^\gamma},$$

(où $\frac{d^0 y}{dx^0} = y$, etc.), M étant le produit de trois coefficients binomiaux. La simplicité de ce résultat porte à croire qu'on pourrait y parvenir plus brièvement en suivant une marche moins directe.

I.

Vandermonde a donné le nom de puissance du second ordre au produit $x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$, qu'il a représenté par $[x]^n$. Il a montré que la formule du binome s'étend à ces puissances; on a

$$[x+y]^n = [x]^n + n[x]^{n-1}[y] + \frac{n.n-1}{1.2}[x]^{n-2}[y]^2 + \ldots + [y]^n.$$

Kramp a étendu cette formule aux produits

$$x.(x+r)(x+2r).\;.[x+(n-1)r],$$

qu'il a nommés d'abord *facultés*, puis *factorielles*, et qu'il a notés ainsi $x^{n|r}$; il a démontré la formule du binome des factorielles. Les dénominations et notations de Vandermonde et de Kramp ne paraissent pas fréquemment employées.

Si l'on divise les deux membres de la formule de Vandermonde par $1.2.3\ldots n$, en remplaçant d'abord le coefficient binomial

$$\frac{n.(n-1)\;..(n-k+1)}{1.2\;..k} \text{ par } \frac{1.2.3\ldots n}{1.2.3\ldots k.1.2.3\ldots n-k},$$

on aura, en conservant les notations ordinaires,

$$\frac{(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1)}{1.2\ldots n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{1.2\ldots n-1}\cdot\frac{y}{1} + \frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1.2\ldots n-2}\cdot\frac{y(y-1)}{1.2} + \ldots$$

qui ne contient plus que des coefficients binomiaux; et si pour abréger on écrit $\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{1.2\ldots k} = (a, k)$, on trouvera

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

en posant en général $(k, o) = 1$ pour la symétrie des formules.

Cette formule et d'autres qui s'en déduisent se prêtent facilement au calcul, comme on le verra plus loin. La formule précédente, dont on trouve une démonstration fort simple dans l'analyse algébrique de M. Cauchy (page 100), est vraie pour toutes les valeurs de x et y; mais il est bon de distinguer les quantités positives des négatives : on a ainsi quatre formules

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x-z, n-z)(y, z),$$

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z, n-z)(y-1+z, z),$$

$$(x-y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (-1)^z (x, n-z)(y-1+z, z).$$

Quand f est un nombre entier positif plus grand que l'entier positif g, la réduction au même dénominateur donne de suite $(f, g) = (f, f-g)$; ainsi quand les valeurs de x et y permettent d'employer cette transformation, on a les douze formules suivantes où les sommes sont prises depuis $z = 0$ jusqu'à $z = n$ inclusivement :

$$(x+y, n) = \sum (x, x-n+z)(y, z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x, n-z)(y, y-z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, y-z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, y-1),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, n-z)(y-1+z, y-1),$$

$$(x+y, n) = \sum (x, x-n+z)(y, y-z),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x-z, x-n)(y, y-z),$$

$$(x+y, n) = \sum (x-z, x-n)(y-1+z, y-1),$$

$$(x-y, n) = \sum (-1)^z (x, x-n+z)(y-1+z, y-1).$$

Ces formules en renferment beaucoup d'autres particulières. On peut voir à cet égard la note IX de l'analyse algébrique de M. Cauchy. Voici maintenant quelques applications.

II.

Pour montrer l'utilité de la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x, n-z)(y, z),$$

on peut prendre le problème suivant :

« Une urne contient a boules blanches et b boules noires, en tout » $c = a + b$. Il a été fait $\mu = m + n$ tirages. Quelle est pour une per- » sonne qui sait que ce nombre de tirages a été fait, mais qui ne con- » naît pas le nombre de boules blanches et de boules noires sorties, » la probabilité qu'en $\mu' = m' + n'$ nouveaux tirages, on aura m' » boules blanches et n' noires. On suppose que les boules ne sont » pas remises dans l'urne après le tirage. »

Solution. La probabilité du tirage de m boules blanches et de n noires, dans l'hypothèse indiquée, est

$$\frac{a.(a-1)\ldots(a-m+1)}{c.(c-1)\ldots(c-m+1)} \cdot \frac{b.(b-1)\ldots(b-n+1)}{(c-m)(m-1)\ldots(c-m-n+1)} \cdot \frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$$
$$= \frac{(a, m)(b, n)}{(c, \mu)}.$$

Comme il reste dans l'urne $a-m$ boules blanches et $b-n$ boules noires, en tout $c-\mu$, la probabilité du tirage de m' boules blanches et de n' boules noires sera $\frac{(a-m,\, m')(b-n,\, n')}{(c-\mu,\, \mu')}$, en supposant m et n connus. Mais si m et n sont inconnus, qu'on sache seulement que $m+n=\mu$, la probabilité cherchée sera la somme des valeurs que prend la probabilité composée $\frac{(a,\, m)(b,\, n)}{(c,\, \mu)} \times \frac{(a-m,\, m')(b-n,\, n')}{(c-\mu,\, \mu')}$ quand on y suppose successivement

$$m=0,\quad n=\mu;\quad m=1,\quad n=\mu-1;\quad m=2,\quad n=\mu-2;\ldots\quad m=\mu,\quad n=0.$$

Mais, par une simple permutation dans l'ordre des facteurs, on a

$$\frac{(a,\, m)(b,\, n)}{(c,\, \mu)} \cdot \frac{(a-m,\, m')(b-n,\, n')}{(c-\mu,\, \mu')} = \frac{(a,\, m')(b,\, n')}{(c,\, \mu')} \times \frac{(a-m',\, m)(b-n',\, n)}{(c-\mu',\, \mu)};$$

la probabilité cherchée égalera donc

$$\frac{(a,\, m')(b,\, n')}{(c,\, \mu')} \sum_{z=0}^{z=n} \frac{(a-m',\, \mu-z)(b-n',\, z)}{(c-\mu',\, \mu)}.$$

Si donc on fait dans la formule

$$(x+y,\, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x,\, n-z)(y,\, z),$$

$$x=a-m',\quad y=b-n' \text{ et } n=\mu, \text{ d'où } (x+y,\, n)=(c-\mu',\, \mu),$$

la probabilité précédente deviendra

$$\frac{(a,\, m')(b,\, n')}{(c,\, \mu')},$$

c'est-à-dire sera la même que si aucun tirage n'avait été fait avant les μ derniers.

Le même problème, pour le cas particulier de $n'=0$, a été résolu par M. Mondesir, à la page 3 du deuxième volume de ce Journal.

III.

Pour montrer l'usage de la formule

$$(x+y, n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z, n-z)(y, z),$$

on peut prendre le problème suivant :

« Deux personnes jouent à qui gagnera le premier un certain nombre » de points; elles sont d'égale force et cessent le jeu avant la fin de la » partie. Il manque à la première p points et à la seconde q points pour » avoir gagné. Comment les joueurs doivent-ils se partager l'enjeu?»

Solution. Soit $\varphi(p, q)$ la part de l'enjeu 1 qui revient au joueur A auquel il manque p points, tandis qu'il en manque q à son adversaire B; s'il se joue encore un coup qui procure à l'un des joueurs le gain d'un point, la part du joueur A deviendra $\varphi(p-1, q)$ s'il gagne le point, et $\varphi(p, q-1)$ s'il le perd. Or l'un est aussi probable que l'autre, puisque les joueurs sont d'égale force; il faut donc prendre, pour déterminer la fonction $\varphi(p, q)$, l'équation

$$\varphi(p, q) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1, q) + \tfrac{1}{2}\varphi(p, q-1),$$

en remarquant que d'après les conditions du jeu p et q sont des entiers positifs et qu'on a $\varphi(0, q) = 1$, $\varphi(p, 0) = 0$.

D'après cela on trouve

$$\varphi(p, 1) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1, 1) + \tfrac{1}{2}\varphi(p, 0) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1, 1);$$

et par conséquent

$$\begin{array}{ll} \varphi(p-1, 1) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-2, 1), & \varphi(p-2, 1) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-3, 1), \text{ etc.}, \\ \varphi(2, 1) = \tfrac{1}{2}\varphi(1, 1), & \varphi(1, 1) = \tfrac{1}{2}; \end{array}$$

d'ou par élimination $\varphi(p, 1) = \frac{1}{2^p}$.

Par un calcul tout semblable, on trouvera

$$\varphi(p, 2) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1, 2) + \tfrac{1}{2}\varphi(p, 1) = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1, 2) + \frac{1}{2^{p+1}}.$$

Ainsi l'on a la suite d'équations

$$\begin{aligned}
\varphi(p,2) &= \tfrac{1}{2}\varphi(p-1,2)+\frac{1}{2^{p+1}},\\
\varphi(p-1,2) &= \tfrac{1}{2}\varphi(p-2,2)+\frac{1}{2^{p}},\\
\varphi(p-2,2) &= \tfrac{1}{2}\varphi(p-3,2)+\frac{1}{2^{p-1}},\\
&\vdots\\
\varphi(1,2) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2};
\end{aligned}$$

d'où, par élimination,

$$\varphi(p,2)=\frac{p}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^p}.$$

On trouvera semblablement

$$\varphi(p,3)=\frac{(p+1).p}{1.2}\cdot\frac{1}{2^{p+2}}+\frac{p}{1}\cdot\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^p},$$

$$\varphi(p,4)=\frac{(p+2)(p+1).p}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^{p+3}}+\frac{p+1.p}{1.2}\cdot\frac{1}{2^{p+2}}+\frac{p}{1}\cdot\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^p},$$

et généralement

$$\varphi(p,q)=(p+q-2,\,q-1).\frac{1}{2^{p+q-1}}+(p+q-3,\,q-2).\frac{1}{2^{p+q-2}}+\ldots$$
$$+(p,\,1).\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{2^p}.$$

Jacques Bernoulli a donné dans l'*Ars conjectandi,* la formule

$$\varphi(p,q)=\frac{1}{2^{p+q-1}}[1+(p+q-1,1)+(p+q-1,2)+\ldots(p+q-1,q-1)],$$

qui se tire facilement de la remarque que la partie sera nécessairement finie après $p+q-1$ coups au plus.

On peut au reste ramener la première forme de $\varphi(p,q)$ à la seconde ainsi qu'il suit. La première forme peut s'écrire

$$\frac{1}{2^{p+q-1}}[(p+q-2,\,q-1)+2.(p+q-3,\,q-2)+2^2.(p+q-4,\,q-3)+\ldots 2^{q-1}];$$

mais on a en général

$$2^a = (1+1)^a = (a,\,0) + (a,\,1) + (a,\,2) + \ldots + (a,\,a).$$

La quantité entre parenthèses deviendra donc, en renversant l'ordre des termes,

$$\begin{array}{l}
(q-1,0)+(q-1,1)+(q-1,\,2)\;+(q-1,3)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(q-1,\,z)+\ldots \\
\quad (p,1)(q-2,\,0)+(p,1)(q-2,\,1)+(p,1)(q-2,2)+\ldots\ldots\ldots\ldots+(p,1)(q-2,z-1)+\ldots \\
\qquad\qquad (p+1,\,2)(q-3,0)+(p+1,\,2)(q-3,\,1)+\ldots+(p+1,2)(q-3,z-2)+\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +(p+2,\,3)(q-4,\,0)+\ldots+(p+2,3)(q-4,z-3)+\ldots \\
\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(p+1+z,z)(q-z,\,0)+\ldots
\end{array}$$

Or la dernière colonne pouvant s'écrire

$$\sum_{i=0}^{i=z} (q-1-i,\,z-i)\,(p-1+i,\,i),$$

deviendra $(p+q-1,\,z)$, en vertu de la formule

$$(x+y,\,n) = \sum_{z=0}^{z=n} (x-z,\,n-z)\,(y-1+z,\,z),$$

où il suffit de faire $x=q-1$, $y=p$, $n=z$. Il résulte de là

$$\mathcal{D}(p,q) = \frac{1}{2^{p+q-1}}\left[1+(p+q-1,\,1)+(p+q-2,\,2)+\ldots(p+q-1,\,q-1)\right],$$

ce qui est la formule de Bernoulli.

IV.

Pour montrer l'utilité de la formule

$$(x-y,\,n) = \sum_{z=0}^{z} (-1)^z.(x,\,x-n+z)(y-1+z,\,z),$$

on peut prendre le théorème suivant :

« *Théorème*. Soient $A_0, A_1, \ldots A_n$, ainsi que y et t, des fonctions » quelconques de x; on aura toujours (en employant la notation de » Lagrange)

$$\left.\begin{array}{l} y\,\{A_0(ty)+A[A_1(ty)']'+[A_2(ty)'']''+\ldots+[A_n(ty)^{(n)}]^{(n)}\} \\ \quad = B_0t+(B_1t')'+(B_2t'')''+\ldots+[B_nt^{(n)}]^{(n)}. \end{array}\right\} \quad (1)$$

En considérant t comme constant, on a de suite

$$B_0 = y\,\{A_0y+(A_1y')'+(A_2y'')''+\ldots+[A_ny^{(n)}]^{(n)}\};$$

et si l'on pose

$$A_0y+(A_1y')'+(A_2y'')''+\ldots+[A_ny^{(n)}]^{(n)}=0,$$

il en résulte $B_0 = 0$. Dans ce cas l'on a un théorème dû à M. Jacobi, et dont il a montré l'application au calcul des variations (Journal de M. Crelle, tome XVII, page 71, et *Journal de Mathématiques,* tome III, page 44). L'illustre auteur a trouvé la loi des fonctions B; j'ignore s'il l'a publiée, c'est pourquoi je vais l'exposer ici.

N. B. Dans les calculs suivants il n'entrera que des termes de la forme $MA_i^{(\alpha)}y^{(\beta)}$ ou $MA_i^{(\alpha)}y^{(\beta)}.y^{(\gamma)}$, dans lesquels M est un coefficient numérique, et

$$A_i^{(\alpha)}=\frac{d^\alpha A_i}{dx^\alpha},\quad y^{(\beta)}=\frac{d^\beta y}{dx^\beta},\quad y^{(\gamma)}=\frac{d^\gamma y}{dx^\gamma}.$$

On pourra sans inconvénient omettre les parenthèses et écrire y^α au lieu de $y^{(\alpha)}$ les exposants désignant un nombre d'accents. En faisant cette convention il faudra avoir bien soin d'écrire $y^{(\beta)}.y^{(\beta)} = y^\beta.y^\beta$ et non $= y^{2\beta}$. Il faut encore se rappeler que y^0 signifiera $y=\frac{d^0y}{dx^0}$, et bien se garder de faire $y^0 = 1$, comme si o était un exposant.

Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} y\,(C_0t+C_1t'+C_2t''+\ldots+C_{2n}t^{2n}) = B_0t \\ \qquad +(B_1t')'+(B_2t'')''+\ldots+[B_nt^{(n)}]^{(n)}, \end{array}\right\} \quad (2)$$

ou plus simplement, en posant

$$\left.\begin{array}{l} D_0 = C_0 y, \quad D_1 = C_1 y, \quad D_2 = C_2 y, \ldots D_{2n} = C_{2n} y, \\ D_0 t + D_1 t' + D_2 t'' + \ldots + D_{2n} t^{(2n)} = B_0 t + (B_1 t')' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}, \end{array}\right\} \quad (3)$$

il faudra d'abord calculer les fonctions C et D au moyen de l'équation

$$\left.\begin{array}{l} A_0 t y + [A_1 (ty)']' + [A_2 (ty)'']'' + \ldots + [A_n (ty)^{(n)}]^{(n)} \\ \quad = C_0 t + C_1 t' + C_2 t'' + \ldots + C_{2n} t^{(n)}, \end{array}\right\} \quad (4)$$

puis tirer de l'équation (3) les fonctions B ainsi qu'il suit : on a d'abord $B_0 = D_0$, et l'équation (3) se réduit à

$$D_1 t' + D_2 t_2 + \ldots + D_{2n} t^{(2n)} = (B_1 t')' + (B_2 t'')'' + \ldots + [B_n t^{(n)}]^{(n)}.$$

Comme le second membre est une dérivée exacte il faudra avoir la condition

$$D_1 - D_2' + D_3'' - \ldots - D_{2n}^{(2n-1)} = 0;$$

passant à l'équation primitive il viendra

$$\begin{array}{l} [D_2 - D_3' + \ldots + D_{2n}^{(2n-2)}]\, t' + [D_3 - D_4' + \ldots - D_{2n}^{(2n-3)}]\, t'' + \ldots \\ \quad = B_1 t' + (B_2 t'')' + \ldots \end{array}$$

Cette équation donne

$$B_1 = D_2 - D_3' + D_4'' + \ldots + D_{2n}^{(2n-2)}.$$

Ensuite l'équation

$$\begin{array}{l} [D_3 - D_4' + \ldots - D_{2n}^{(2n-3)}]\, t'' + [D_4 - D_5' \ldots + D_{2n}^{(2n-4)}]\, t''' + \ldots \\ \quad = (B_2 t'')' + (B_3 t''')'' \ldots, \end{array}$$

ayant pour second membre une dérivée exacte, donnera l'équation de condition

$$D_3 - 2D_4' + 3D_5'' - \ldots - (2n-2)\, D_{2n}^{(2n-3)} = 0,$$

et comme la primitive est

$$[D_4 - 2D_5' + 3D_6'' \ldots + (2n-3)\, D_{2n}^{(2n-4)}]\, t'' + \ldots = B_2 t'' + (B_3 t''')' + \ldots,$$

on aura

$$B_2 = D_4 - 2D_5' + 3D_6'' - \ldots + (2n-3)\,D_{2n}^{(2n-4)}.$$

Continuant de même, on trouvera pour la formule des équations de condition

$$\left.\begin{aligned} 0 = D_{2a-1} - (a,\,1)\,D_{2a}' + (a+1,\,2)\,D_{2a+1}''\ldots \\ -(2n-a,\,2n-2a+1)\,D_{2n}^{(2n-2a+1)}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

et pour formule des fonctions B,

$$\left.\begin{aligned} B_a = D_{2a} - (a,\,1)\,D_{2a+1}' + (a+1,\,2)\,D_{2a+2}''\ldots \\ +(2n-a-1,\,2n-2a)\,D_{2n}^{(2n-2a)}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

qui se tire de l'équation de condition, en y augmentant les indices des fonctions D de l'unité.

Si nous posons en général

$$(D,\,b,\,a) = D_b - (a,\,1)\,D_{b+1}' + (a+1,\,2)\,D_{b+2}'' - \ldots \quad (7)$$

en terminant le second membre au terme renfermant D_{2n}, il suffira de prouver que pour $b = 2a-1$ on a $(D,\,b,\,a) = 0$, et de calculer $(D,\,b,\,a)$ pour $b = 2a$, ce qui donnera B_a.

Le calcul de la fonction $(D,\,b,\,a)$ se simplifiera au moyen de la remarque suivante. Comme les équations (5) doivent être satisfaites, quelles que soient les fonctions A et qu'elles sont formées de termes tels que $MA_i^\alpha\, y^\beta\, y^\gamma$, où ne se trouve point A_0 qui n'entre que dans B_0, on voit que tous les termes en A_1 doivent se détruire entre eux, qu'il en doit être de même pour ceux en A_2, pour ceux en A_3, et ainsi de suite. Il suffira donc de vérifier les équations (5) pour le cas où l'équation (1) se réduirait à

$$(1') \qquad y\{A_0 ty + [A_i(ty)^{(i)}]^{(i)}\} = B_0 t + (B_1 t')' + \ldots$$

De même encore, si dans ce cas, on calcule les fonctions B_a données par les équations (6), la somme des valeurs de B_a relatives à $i = 1,\,2,\,3\ldots\,n$, donnera la valeur de B_a pour le cas de l'équation (1).

Cela posé, si dans la fonction $(D,\,b,\,a)$ relative à l'équation (1'), on

4..

remplace D_k par sa valeur $C_k y$, on obtiendra

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}, b, a) = &[C_b-(a, 1)C'_{b+1}+(a+1, 2)C''_{b+2}-\ldots]\,y,\\ &-(a, 1)[C_{b+1}-(a+1, 1)C'_{b+2}+(a+2, 2)C''_{b+3}\ldots]\,y',\\ &+(a+1, 2)[C_{b+2}-(a+2, 1)C'_{b+3}+(a+3, 2)C''_{b+4}\ldots]\,y'',\\ &\text{etc.,}\end{aligned}$$

chaque quantité entre parenthèses devant finir par le terme contenant C_{2i} et la dernière de ces quantités se réduisant au seul terme C_{2i}.

On peut donc prendre pour terme général de (D, b, a) l'expression

$$(-1)^\beta (a+\beta-1, \beta)\left[\begin{array}{l} C_{b+\beta}-(a+\beta, 1)C'_{b+\beta+1}\\ \qquad +(a+\beta+1, 2)C''_{b+\beta+2}-\ldots\end{array}\right] y^k.$$

Pour la transformer nous ferons $b+\beta=c$, $a+\beta=d$, et la quantité entre parenthèses deviendra

$$\begin{aligned}C_c-(d, 1)C'_{c+1}+(d+1, 2)C''_{c+2}-\ldots\\ =f_0 y+f_1 y'+f_2 y''+\ldots+f_\alpha y^\alpha+\ldots\end{aligned}$$

Pour calculer le coefficient f_α il faut réduire C_c, C'_{c+1}, C''_{c+2}, etc., aux seuls termes contenant y^α.

Or si l'on remarque que le terme général de $[A_i(ty)^{(i)}]^{(i)}$ est $(i, z)\,A_i^{(i-z)}.(ty)^{(i+z)}$, et que le terme général de $(ty)^{(i+z)}$ est $(i+z, k)\,y^{(i+z-k)}\,t^{(k)}$, on trouvera pour terme général du coefficient C_k $(i, z)\,(i+z, k)\,A_i^{i-z}.y^{i+z-k}$, et pour avoir la partie renfermant les termes en y^α, il faudra faire $i+z-k=\alpha$; d'où

$(i, \alpha+k-i)\,(\alpha+k, k)\,A_i^{2i-k-\alpha}y^\alpha$. On aura donc

$$\begin{aligned}C_c\ &=\ldots+(i, \alpha+c-i)\,(\alpha+c, c)\,A_i^{2i-c-\alpha}y^\alpha\ldots,\\ C_{c+1}&=\ldots+(i, \alpha+c-i)(\alpha+c, c+1)\,A_i^{2i-c-\alpha}y^{\alpha-1}\\ &\quad+(i, \alpha+c+1-i)(\alpha+c+1, c+1)\,A_i^{2i-c-1-\alpha}y^\alpha\ldots,\\ C_{c+2}&=\ldots+(i, \alpha+c-i)(\alpha+c, c+2)\,A_i^{2i-c-\alpha}y^{\alpha-2}\\ &\quad+(i, \alpha+c+1-i)(\alpha+c+1, c+2)\,A_i^{2i-c-1-\alpha}y^{\alpha-1}\\ &\quad+(i, \alpha+c+2-i)(\alpha+c+2, c+2)\,A_i^{2i-c-2-\alpha}y^\alpha\ldots,\end{aligned}$$

etc.

Ces équations peuvent se disposer ainsi :

$$\begin{aligned}
&&&&\mathrm{K}\,\mathrm{A}_i^\lambda\ y^\alpha &= \mathrm{C}_c,\\
&&\mathrm{L}\,\mathrm{A}_i^\lambda\ y^\alpha &+\mathrm{L}'\mathrm{A}_i^{\lambda-1}y^{\alpha-1} &&= \mathrm{C}_{c+1},\\
\mathrm{M}\,\mathrm{A}_i^\lambda\ y^\alpha &+\mathrm{M}'\mathrm{A}_i^{\lambda-1}y^{\alpha-1} &+\mathrm{M}''\mathrm{A}_i^{\lambda-2}y^{\alpha-2} &&&= \mathrm{C}_{c+2},\\
\mathrm{N}\mathrm{A}_i^\lambda y^\alpha + \mathrm{N}'\mathrm{A}_i^{\lambda-1}y^{\alpha-1} &+\mathrm{N}''\mathrm{A}_i^{\lambda-2}y^{\alpha-2} &+\mathrm{N}'''\mathrm{A}_i^{\lambda-3}y_i^{\alpha-3} &&&= \mathrm{C}_{c+3}.
\end{aligned}$$

Dans les développements de C'_{c+1}, C''_{c+2}, etc., on voit que pour les termes formant la diagonale supérieure du tableau précédent, en prenant les fonctions dérivées, il faudra faire tomber tous les accents sur y; que pour les termes formant la diagonale immédiatement inférieure, il faudra faire tomber un accent sur A_i et tous les autres sur y, et ainsi de suite. D'après la règle pour trouver le développement de $[\mathrm{A}_i^{(\lambda)}y^{(\mu)}]^{(\nu)}$, on voit qu'il s'introduira des coefficients binomiaux comme multiplicateurs.

Ainsi la partie du coefficient de $\mathrm{A}_i^{2i-c-\alpha}\,y^\alpha$ qui provient de la diagonale supérieure est égale à

$$(i,\alpha+c-i)\,[(\alpha+c,c)-(d,1)(\alpha+c,c+1)+(d+1,2)(\alpha+c,c+2)\ldots];$$

et comme la diagonale renferme $\alpha+1$ termes la quantité entre parenthèses sera

$$\sum_{z=0}^{z=\alpha}(-1)^z\,(\alpha+c,\ c+z)(d-1+z,\ z);$$

mais on a

$$(x-y,n)=\sum_{z=0}^{z=n}(-1)^z\,(x,x-n+z)(y-1+z,z):$$

il suffira donc de faire $n=\alpha$, $x=\alpha+c$, $y=d$, et l'on aura pour somme $(\alpha+c-d,\alpha)$; la première partie du coefficient de $\mathrm{A}_i^{2i-c-\alpha}\,y^\alpha$ est donc $(i,\alpha+c-i)\ (\alpha+c-d,\alpha)$.

Pour la partie du coefficient relative à la diagonale immédiatement inférieure, il faudra d'abord augmenter c de l'unité; puis en raison des facteurs $\quad -(d,1),\ +(d+1,2),\ -(d+2,3),+\ldots$

multipliés respectivement par les facteurs

$$1,\quad (2,1),\quad (3,1),\quad \text{etc.},$$

introduits par les dérivations, ce qui donne la suite

$$-(d, 1),\quad +(d, 1)(d+1, 1),\quad -(d, 1)(d+1, 2),\quad +\ldots$$

on voit qu'il faudra encore changer d en $d+1$, et de plus introduire le facteur $-(d, 1)$, ce qui donne le second coefficient partiel

$$-(d, 1)(i, \alpha+c+1-i)(\alpha+c-d, \alpha),$$

où le dernier facteur est resté le même.

On trouvera semblablement pour troisième coefficient partiel

$$(d+1, 2)(i, \alpha+c+2-i)(\alpha+c-d, \alpha),$$

et ainsi de suite.

Maintenant si l'on remarque que dans chaque verticale du tableau des valeurs de C_c, C_{c+1}, C_{c+2}, etc., le dernier terme renferme A_i, le supérieur contenant $A_i^{2i-c-\alpha}$, il y aura pour le terme en $A_i^{2i-c-\alpha}y^{\alpha}$ un nombre $2i-c-\alpha+1$ de coefficients partiels formant la somme

$$(\alpha+c-d, \alpha)[(i, \alpha+c-i)-(d, 1)(i, \alpha+c+1-i)+(d+1, 2)(i, \alpha+c+2-i)-\ldots]$$
$$=(\alpha+c-d, \alpha)\sum_{z=0}^{z=2i-c-\alpha}(-1)^z(i, \alpha+c-i+z)(d-1+z, z).$$

Or si dans la formule

$$(x-y, n)=\sum_{z=0}^{z=n}(-1)^z(x, x-n+z)(y-1+z, z),$$

on fait $x=i$, $y=d$, $n=2i-c-\alpha$, on trouvera pour la somme précédente $(i-d, 2i-c-\alpha)$, et pour coefficient total

$$(\alpha+c-d, \alpha)(i-d, 2i-c-\alpha).$$

Multipliant par $(-1)^{\beta}(a+\beta-1, \beta)$ et remplaçant c et d par leurs valeurs $b+\beta$, $a+\beta$, on aura

$$(-1)^{\beta}(a+\beta-1, \beta)(b-a+\alpha, \alpha)(i-a-\beta, 2i-b-\alpha-\beta)A_i^{2i-b-\alpha-\beta}y^{\alpha}y_{\beta}.$$

Pour le terme général de (D, b, a) relativement à l'équation $(1')$.

Si l'on change α en β, l'accent de A_i ne change pas, de sorte que les termes en $y^\alpha . y^\beta$ et $y^\beta . y^\alpha$ ne diffèrent que par le coefficient numérique. Le terme en $y^\beta . y^\alpha$ est donc

$$(-1)^\alpha (a+\alpha-1, \alpha)(b-a+\beta, \beta)(i-a-\alpha, 2i-b-\alpha-\beta) A_i^{2i-b-\alpha-\beta} y^\beta y^\alpha.$$

Ces deux termes peuvent donc se réduire en un seul $QA_i^{2i-b-\alpha-\beta} y^\alpha y^\beta$, en supposant

$$\left.\begin{array}{l} Q=(-1)^\alpha(a+\alpha-1, \alpha)(b-a+\beta, \beta)(i-a-\alpha, 2i-b-\alpha-\beta) \\ \quad +(-1)^\beta(a+\beta-1, \beta)(b-a+\alpha, \alpha)(i-a-\beta, 2i-b-\alpha-\beta). \end{array}\right\} \quad (9)$$

Il reste à montrer que pour $b=2a-1$ on a $Q=0$, et à calculer Q pour $b=2a$.

Vérification des équations (5), *ou démonstration du théorème de M. Jacobi.*

Si dans la valeur de Q donnée par l'équation (9) on fait $b=2a-1$, d'où $b-a=a-1$, on aura

$$Q=(a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta-1, \beta)[(-1)^\alpha(i-a-\alpha, 2i-b-\alpha-\beta)+(-1)^\beta(i-a-\beta, 2i-b-a-\beta)].$$

Représentons par h le nombre d'accents de A_i, savoir $2i-2a+1-\alpha-\beta$; écrivons de plus p et q au lieu de $i-a-\alpha$ et $i-a-\beta$, c'est-à-dire posons les équations

$$i-a-\alpha=p, \quad i-a-\beta=q, \quad p+q=h-1;$$

le facteur de Q entre parenthèses deviendra

$$(-1)^\alpha(p, h)+(-1)^\beta(q, h),$$

quantité toujours nulle. En effet, si les deux nombres p, q sont positifs, ils seront toujours moindres que h, et dès lors on aura $(p, h)=0$, $(q, h)=0$, d'où $Q=0$. Le cas où l'un des nombres p, q est nul, et celui où p et q sont tous deux nuls, conduisent à la même conséquence.

Si des deux nombres p et q l'un est positif et l'autre négatif, en supposant $\alpha < \beta$ on aura $\quad p > 0, \quad q < 0.$

Soit donc $\qquad q = -q', \quad$ d'où $\quad p - h + 1 = q',$

il en résultera

$$(p, h) = \frac{p.(p-1)(p-2)\ldots q'}{1.2\ldots h} = \frac{q'.(q'+1)\ldots q'+h-1}{1.2\ldots h}$$
$$= (-1)^h(-q', h) = (-1)^h(q, h);$$

on aura par suite

$$(-1)^\alpha (p, h) + (-1)^\beta (q, h) = (q, h)\left[(-1)^{\alpha+h} + (-1)^\beta\right].$$

Or l'équation $2(i-a)+1 = (\alpha+h)+\beta$ montre que des nombres $\alpha+h$, β, l'un est pair et l'autre impair; on a donc toujours

$$(-1)^{\alpha+h} + (-1)^\beta = 0,$$

et par suite $Q = 0$. Les équations de condition (5) sont donc satisfaites et le théorème se trouve démontré.

Loi des fonctions B, *terme général.*

Faisons $b = 2a$ dans (D, b, a), nous aurons la fonction B_a, dont le terme général sera $QA_i^h y^\alpha y^\beta$, où $h = 2i - 2a - \alpha - \beta$, et

$$\left.\begin{aligned} Q = (-1)^\alpha(a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta, \beta)(i-a-\alpha, h) \\ + (-1)^\beta(a+\beta-1, \beta)(a+\alpha, \alpha)(i-a-\beta, h), \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

en supposant α différent de β; mais pour $\alpha = \beta$, on a

$$Q = (-1)^\alpha(a+\alpha-1, \alpha)(a+\alpha, \alpha)\left(\tfrac{1}{2}h, h\right), \qquad (11)$$

toujours nul si h surpasse 0. Mais si $h = 0$, on a

$$\left(\tfrac{1}{2}h, h\right) = (0,0) = 1, \quad i = a + \alpha \quad \text{et} \quad Q = (-1)^{i-a}(i-1, i-a)(i, i-a).$$

Dans le cas où α et β sont différents, Q est susceptible de simplification. Posons en effet $i - a - \alpha = p$, $i - a - \beta = q$, d'où $p+q=h$. Si p et q sont positifs, ils seront nécessairement moindres que h, et l'on aura $(p, h) = 0$, $(q, h) = 0$, d'où $Q = 0$. Mais si l'on a $p > 0$, $q < 0$, ce qui suppose $\alpha < \beta$, en posant $q = -q'$, q' sera positif et l'on aura $p - q' = h$, d'où l'on tirera, comme plus haut,

$$(q, h) = (-q', h) = \frac{-q'(-q'-1)(-q'-h+1)}{1.2\ldots h} = (-1)^h \cdot \frac{q'(q'+1)\ldots p-1}{1.2\ldots h}$$
$$= (-1)^h (p-1, h) = (-1)^h \cdot \frac{-q}{p}(p, h).$$

D'ailleurs

$$(a+\alpha, \alpha) = \frac{\alpha+a}{a}(a+\alpha-1, \alpha),$$
$$(a+\beta, \beta) = \frac{\beta+a}{a}(a+\beta-1, \beta),$$

d'où résulte

$$Q = (a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta-1, \beta)(p, h)\left[(-1)^\alpha \frac{\beta+a}{a} - (-1)^{\beta+h} \frac{\alpha+a}{a} \cdot \frac{q}{p}\right].$$

Mais l'équation $2(i-a) = \alpha + (\beta + h)$ montre que α et $\beta + h$ sont tous deux pairs ou tous deux impairs, ainsi $(-1)^\alpha = (-1)^{\beta+h}$; d'ailleurs

$$\frac{\beta+a}{a} - \frac{q}{p}\frac{\alpha+a}{a} = \frac{i(\beta-\alpha)}{ap};$$

donc enfin

$$Q = (-1)^\alpha \frac{i(\beta-\alpha)}{ap}(a+\alpha-1, \alpha)(a+\beta-1, \beta)(p, h). \quad (12)$$

Cette formule convient aussi au cas de $q = 0$, pour lequel $p = h$; car il est très facile de la ramener à

$$Q = (-1)^\alpha (\alpha + a - 1, \alpha)(\beta + a, \beta),$$

qui résulte directement des suppositions $q = 0$, $p = h$.

Pour le cas de $a = 0$, l'équation (10) montre que Q est nul, sauf les cas de $\alpha = 0$, ou $\beta = 0$, ou $\alpha = \beta = 0$, pour lesquels $Q = (i, h)$; c'est ce qui résulte d'ailleurs du calcul de $D_0 = C_0 y$.

Exemple. Soit l'équation du sixième ordre

$$y\{A_0 ty + [A_1(ty)']' + [A_2(ty)'']'' + [A_3(ty)''']'''\} = B_0 t + (B_1 t')' + (B_2 t'')'' + (B_3 t''')'''.$$

Pour avoir B_3, comme $a = 3$, l'équation

$$2(i - a) \doteq h + \alpha + \beta,$$

où les données sont i et a et les inconnues h, α et β qui doivent être des entiers positifs tels qu'on ait $\alpha <$ ou $= i - a$, $\beta =$ ou $> i - a$, montre qu'il faut poser $i = 3$, ce qui donne $h = \alpha = \beta = 0$, d'où $Q = 1$; on aura donc

$$B_3 = A_3 y y = A_3 y^2.$$

Pour avoir B_2, on fera $a = 2$ dans l'équation $2(i - a) = h + \alpha + \beta$; on ne peut donc prendre que $i = 2$ ou $i = 3$. D'abord $i = 2$ donne le terme $A_2 y^2$, comme on l'a vu plus haut; puis, pour $i = 3$, l'équation $2 = h + \alpha + \beta$ donne trois solutions :

1^re solution	$2 = 0 + 0 + 2,$	$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}(3,2) = 9 \ldots$	$9A_3 y \cdot y''$;
2^e solution	$2 = 0 + 1 + 1,$	$Q = -(2,1)(3,1) = -6.$	$-6A_3 y' \cdot y'$;
3^e solution	$2 = 1 + 0 + 1,$	$Q = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}(2,1)(1,1) = 3 \ldots$	$3A'_3 y \cdot y'$.

On a donc trois nouveaux termes en A_3, et en tout

$$B_2 = A_2 y^2 + 9A_3 y y'' - 6A_3 y' y' + 3A'_3 y y'.$$

Enfin, pour avoir B_1 on posera $a = 1$, et l'équation

$$2(i - 1) = h + \alpha + \beta,$$

pour $i = 1$, où $h = \alpha = \beta = 0$, donnera le terme $A_1 y^2$ $(0 = h + \alpha + \beta)$.

La même équation pour $i = 2$ devenant $2 = h + \alpha + \beta$, donne les trois solutions 0, 0, 2; 0, 1, 1; 1, 0, 1, auxquelles répondent $Q = 4$, $Q = -2$, $Q = 2$, et par suite les trois termes

$$4A_2 y y'' - 2A_2 y' y' + 2A'_2 y y'.$$

Enfin, pour $i = 3$, l'équation $4 = h + \alpha + \beta$ a six solutions

h,	α,	β,	
0,	0,	4,	$Q = +\,3.\frac{4}{2}\,(0,0)\,(4,4)\,(2,0) = 6,$
0,	1,	3,	$Q = -\,3.\frac{2}{1}\,(1,1)\,(3,3)\,(1,0) = -\,6,$
0,	2,	2,	$Q = +\,(2,2)\,(3,2)\,(0,0) = 3,$
1,	0,	3,	$Q = +\,3.\frac{3}{2}\,(1,1)\,(3,3)\,(2,1) = 9,$
1,	1,	2,	$Q = -\,3.\frac{1}{1}\,(1,1)\,(2,2)\,(1,1) = -\,3,$
2,	0,	2,	$Q = +\,3.\frac{2}{2}\,(0,0)\,(2,2)\,(2,2) = 3;$

de là résultent les termes

$$6A_3 y y'''' - 6A_3 y' y''' + 3A_3 y'' y'' + 9A'_3 y y''' - 3A'_3 y' y'' + 3A''_3 y y'',$$

de sorte qu'on aura pour valeur complète

$$\begin{aligned} B_1 = A_1 y^2 + 4A_2 y y'' - 2A_2 y' y' + 2A'_2 y y' + 6A_3 y y'''' - 6A_3 y' y''' \\ + 3A_3 y'' y'' + 9A' y y''' - 3A'_3 y' y'' + 3A_3 y y''. \end{aligned}$$

Quant à

$$B_0 = y[A_0 y + (A_1 y')' + (A_2 y'')'' + (A_3 y''')'''],$$

son terme général est $\quad (i, \alpha - i)\, A_i^{2i-\alpha}\, y y^{\alpha},$

et l'on a

$$\begin{aligned} B_0 = A_0 y^2 + A_1 y y'' + A'_1 y y' + A_2 y y'''' + 2A'_2 y y''' + A''_2 y y''' + A_3 y y^{\text{vi}} \\ + 3A'_3 y y^{\text{v}} + 3A''_3 y y'''' + A'''_3 y y'''. \end{aligned}$$

On voit donc que toute la solution se réduit à celle de l'équation indéterminée $2(i-a) = h + \alpha + \beta$, où α ne surpasse pas β, et au calcul de Q, qui résulte de la multiplication de coefficients binomiaux par les formules (10) et (11), et plus simplement par la formule (12), si α et β sont différents.