JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

DUHAMEL

**Note sur les surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 4 (1839), p. 63-78.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A5_0>

*Note sur les Surfaces isothermes dans les corps solides dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens ;*

PAR M. DUHAMEL.

Je me propose dans cette note d'appliquer la méthode donnée par M. Lamé, dans son Mémoire sur les surfaces isothermes, à une substance dont la conductibilité n'est pas la même dans tous les sens, et de comparer les résultats relatifs à ce cas plus général, à ceux qu'il avait trouvés dans le cas d'une conductibilité invariable.

En supposant la substance constituée semblablement en chacun de ses points, et prenant pour axes de coordonnées les trois directions rectangulaires auxquelles j'ai donné le nom d'*axes principaux de conductibilité*, l'équation qui exprime l'équilibre intérieur des températures, est, comme je l'ai fait voir,

$$(1) \qquad A\frac{d^2v}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dy^2} + C\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

et l'on doit joindre à cette condition, celles qui se rapportent aux limites du corps, maintenues à des températures déterminées, ou soumises à l'action de sources de chaleur connues.

Lorsque les températures sont devenues invariables en chaque point, les surfaces isothermes, c'est-à-dire dont la température est la même en chaque point, sont déterminées par un seul de leurs points, et par conséquent leur équation générale ne renferme qu'un paramètre variable. Or, si l'on pouvait déterminer la forme de cette équation, et la température correspondante à chaque surface, on pourrait connaître la température en un point quelconque ; car les coordonnées de ce point substituées dans l'équation générale des surfaces isothermes feraient connaître la valeur particulière du paramètre de la surface qui passe par ce point, et la température s'ensuivrait.

La question se réduit donc à connaître l'équation des surfaces isothermes, et la température, en fonction du paramètre qu'elle renferme. Telle est la marche suivie par M. Lamé. Pour l'appliquer au cas actuel, je transformerai l'équation (1) en posant

$$x = \xi \sqrt{A}, \quad y = \eta\sqrt{B}, \quad z = \zeta \sqrt{C}.$$

Elle devient alors

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{d\xi^2} + \frac{d^2v}{d\eta^2} + \frac{d^2v}{d\zeta^2} = 0.$$

Si l'on désigne par $\lambda$ le paramètre de l'équation générale des surfaces isothermes, cette équation peut être conçue sous la forme

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \lambda,$$

et la valeur de $v$, sous la suivante

$$v = f(\lambda).$$

Si l'on différentie cette valeur de $v$ en considérant $\lambda$ comme fonction de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, on trouvera

$$\begin{aligned}
\frac{d^2v}{d\xi^2} &= \frac{d^2f}{d^2}\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\,\frac{d^2\lambda}{d\xi^2},\\
\frac{d^2\lambda}{d\eta^2} &= \frac{d^2f}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\eta}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\,\frac{d^2\lambda}{d\eta^2},\\
\frac{d^2v}{d\zeta^2} &= \frac{d^2f}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{d\zeta}\right)^2 + \frac{df}{d\lambda}\,\frac{d^2\lambda}{d\zeta^2},
\end{aligned}$$

en substituant dans l'équation (2), le résultat peut se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{d^2f}{d\lambda^2}}{\dfrac{df}{d\lambda}} = -\frac{\dfrac{d^2\lambda}{d\xi^2} + \dfrac{d^2\lambda}{d\eta^2} + \dfrac{d^2\lambda}{d\zeta^2}}{\left(\dfrac{d\lambda}{d\xi}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{d\eta}\right)^2 + \left(\dfrac{d\lambda}{d\zeta}\right)^2}.$$

Ainsi la fonction désignée par $\lambda$ ou $F(\xi, \eta, \zeta)$ ne pourra représenter les surfaces isothermes, quand on l'égalera à des constantes arbitraires, que si ses dérivées partielles rendent le second membre de l'équation (3) indépendant de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, et dépendant de $\lambda$ seulement comme le premier. Quand la forme de cette fonction sera connue, on déduira $f(\lambda)$ ou $v$ de l'équation (3) qu'on intégrera facilement, en mettant son second membre sous la forme $-\frac{d\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$, ce qui est toujours possible en choisissant convenablement $\varphi(\lambda)$. On aura ainsi

$$(4) \qquad \frac{\frac{d^2f}{d\lambda^2}}{\frac{df}{d\lambda}} = -\frac{d.\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

D'où l'on déduira, en remplaçant $f(\lambda)$ par $v$,

$$(5) \qquad v = \int \frac{C}{\varphi(\lambda)} + C_1,$$

C et $C_1$ étant des constantes arbitraires.

Tout est donc réduit à connaître l'équation générale des surfaces isothermes en fonction de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et du paramètre $\lambda$.

*Cas où les surfaces isothermes sont des ellipsoïdes.*

Proposons-nous d'abord, comme l'a fait M. Lamé, de reconnaître dans quel cas les surfaces isothermes auront une équation de la forme

$$(6) \qquad m\xi^2 + n\eta^2 + p\zeta^2 = 1,$$

$m$, $n$, $p$ étant des fonctions quelconques du paramètre $\lambda$. Pour que cela soit possible, il faut que le second membre de l'équation (3) devienne indépendant de $\xi$, $\eta$, $\zeta$. Pour le former, on déduira de l'équation (6) les dérivées de $\lambda$ par rapport à $\xi$, $\eta$, $\zeta$, en considérant $m$, $n$, $p$ comme des fonctions de $\lambda$. On l'égalera ensuite à une fonction quelconque de $\lambda$, qu'on mettra sous la forme $-\frac{d.\varphi(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$, puis on exprimera que les coefficients des différentes puissances de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont nuls séparément. En désignant par $\varphi$ la fonction $\varphi(\lambda)$, indiquant par des accents les dérivées successives, et posant

$$\frac{1}{2}(m+n+p)=\mathrm{L},\quad m=\frac{1}{a},\quad n=\frac{1}{b},\quad p=\frac{1}{c},$$

ces équations de condition seront

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}&\mathrm{L}a'^2-a''=a'\frac{\varphi'}{\varphi},\quad \mathrm{L}b'^2-b''=b'\frac{\varphi'}{\varphi},\quad \mathrm{L}c'^2-c''=c'\frac{\varphi'}{\varphi},\\&2\mathrm{L}a'b'+2(a'-b')\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)-(a''+b'')=(a'+b')\frac{\varphi'}{\varphi},\\&2\mathrm{L}b'c'+2(b'-c')\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)-(b''+c'')=(b'+c')\frac{\varphi'}{\varphi},\\&2\mathrm{L}a'c'+2(c'-a')\left(\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right)-(a''+c'')=(a'+c')\frac{\varphi'}{\varphi}.\end{aligned}\right.$$

Les trois premières donnent en éliminant $\frac{\varphi'}{\varphi}$,

$$\mathrm{L}(a'-b')=\frac{a''}{a'}-\frac{b''}{b'},\quad \mathrm{L}(b'-c')=\frac{b''}{b'}-\frac{c''}{c'},\quad \mathrm{L}(c'-a')=\frac{c''}{c'}-\frac{a''}{a'}.$$

On satisfait à ces équations en posant

$$a'=b'=c',$$

et toute autre solution conduirait pour $a$, $b$, $c$ à des expressions indépendantes de $\lambda$, et par conséquent doit être rejetée.

Les équations (7) se réduisent alors toutes à la suivante

$$(8)\qquad \mathrm{L}a'^2-a''=a'\frac{\varphi'}{\varphi},$$

qui déterminera $\frac{\varphi'}{\varphi}$ quand $a'$ sera connu. Mais les équations $a'=b'=c'$ laissent $a'$ arbitraire, et par suite $a$. Elles donnent seulement $b=a+\alpha$, $c=a+\beta$, $\alpha$ et $\beta$ étant des constantes arbitraires.

Si donc on désigne par $\psi(\lambda)$ une fonction arbitraire de $\lambda$, on pourra poser

$$a=\psi(\lambda),\quad b=\psi(\lambda)+\alpha,\quad c=\psi(\lambda)+\beta.$$

Les équations (7) étant satisfaites, l'équation (3) est possible. Son second membre que nous avons représenté par $-\frac{\varphi'}{\varphi}$, peut être remplacé par la valeur que l'on tire pour $-\frac{\varphi'}{\varphi}$ de l'équation (8). De cette manière l'équation (3), qui n'est d'ailleurs autre chose que l'équation (2), devient

$$-\frac{\frac{d^2v}{d^2\lambda^2}}{\frac{dv}{d\lambda}} = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}\right) - \frac{a''}{a'},$$

d'où en intégrant, et représentant par M une constante arbitraire,

$$-\,l\,.\,\frac{1}{\mathrm{M}}\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2}\,l\,.abc - l.a'.$$

On tire de là

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{\mathrm{M}a'}{\sqrt{abc}} = \frac{\mathrm{M}\psi'(\lambda)}{\sqrt{\psi(\lambda)\,[\psi(\lambda)+\alpha]\,[\psi(\lambda)+\beta]}},$$

et si l'on pose $\psi(\lambda) = \mu^2$, d'où $\psi'(\lambda) = 2\mu\frac{d\mu}{d\lambda}$, il vient

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} dv &= 2\mathrm{M}\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2+\alpha)(\mu^2+\beta)}},\\ v &= 2\mathrm{M}\int\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2+\alpha)(\mu^2+\beta)}} + \mathrm{N},\end{aligned}\right.$$

N étant une nouvelle constante arbitraire.

On aura ensuite

$$a = \mu^2,\quad b = \mu^2 + \alpha,\quad c = \mu^2 + \beta,$$
$$m = \frac{1}{\mu^2},\quad n = \frac{1}{\mu^2+\alpha},\quad p = \frac{1}{\mu^2+\beta}.$$

Les surfaces isothermes ont alors pour équation générale

$$\frac{\xi^2}{\mu^2} + \frac{\eta^2}{\mu^2+\alpha} + \frac{\zeta^2}{\mu^2+\beta} = 1,$$

ou

$$(10)\qquad \frac{x^2}{\mathrm{A}\mu^2} + \frac{y^2}{\mathrm{B}(\mu^2+\alpha)} + \frac{z^2}{\mathrm{C}(\mu^2+\beta)} = 1.$$

Ainsi pour tous les points de la surface représentée par cette équation, la température sera donnée par la formule (9); $\mu$ sera le paramètre qui variera d'une surface à l'autre, et $\alpha$, $\mathcal{C}$ des constantes que l'on déterminera d'après les températures données de deux surfaces isothermes.

Soient $\mu'$, $\mu_{,}$, les valeurs du paramètre $\mu$ qui correspondent à deux ellipsoïdes quelconques renfermés dans l'équation (10) et ayant pour demi-axes, le premier $a'$, $b'$, $c'$, le second $a$, $b$, $c$. On aura

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{lll} A\mu_{,}^2 = a^2, & B(\mu_{,}^2 + \alpha) = b^2, & C(\mu_{,}^2 + \mathcal{C}) = c^2, \\ A\mu'^2 = a'^2, & B(\mu'^2 + \alpha) = b'^2, & C(\mu'^2 + \mathcal{C}) = c'^2; \end{array}\right.$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad \frac{a'^2 - a^2}{A} = \frac{b'^2 - b^2}{B} = \frac{c'^2 - c^2}{C}.$$

Ce qui donne cette première conséquence.

*Les ellipsoïdes isothermes ne sont pas homofocaux, et les différences des carrés des demi-axes correspondants sont proportionnelles aux conductibilités principales.*

Ainsi ce n'est que dans le cas où la conductibilité est la même en tous sens, que les surfaces isothermes peuvent être des ellipsoïdes, ayant les mêmes foyers.

Les équations (12) montrent que si l'on a $a' > a$, il en résulte $b' > b$, $c' > c$; et que par conséquent *les trois axes des ellipsoïdes isothermes croissent ensemble ou décroissent ensemble*. Mais il n'en résulte nullement que le plus petit axe reste dans la même direction, ainsi que le plus grand et l'axe moyen. Car, si par exemple, l'on a $a > b$, la première des équations (12) n'exige pas que l'on ait $a' > b'$. Toutes les valeurs des variables $a'$, $b'$ qui y satisfont peuvent être regardées comme les coordonnées des points d'une hyperbole, et l'on reconnaît facilement qu'il peut arriver que dans une certaine partie de la courbe, l'ordonnée soit plus petite que l'abscisse, tandis que dans une autre elle sera plus grande.

Considérons maintenant un corps terminé par deux surfaces ellipsoïdes comprises dans l'équation (10). Soient $a$, $b$, $c$, $\mu_1$, $v_1$ les demi-axes, le paramètre $\mu$ et la température, relatifs à la surface intérieure; et $a'$, $b'$, $c'$, $\mu'$, $v'$, les quantités correspondantes qui se rapportent à la surface extérieure. Si elles sont telles que les deux équations (12) soient satisfaites, quatre des équations (11) détermineront $\mu'$, $\mu_1$, $\alpha$, $\mathcal{E}$, et l'équation (10) de toutes les surfaces isothermes sera déterminée. Enfin l'équation (9) déterminera la température de chaque surface, quand on aura déterminé les deux constantes M, N par la condition que $v'$ et $v_1$ soient les températures des deux surfaces extrêmes.

On trouvera d'abord

$$\mu_1 = \frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \mu' = \frac{a'}{\sqrt{A}}, \quad \alpha = \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}, \quad \mathcal{E} = \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}.$$

L'équation (10) devient alors

$$(13) \quad \frac{x^2}{A\mu^2} + \frac{y^2}{B\left(\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}\right)} = 1,$$

et l'on vérifie facilement que pour $\mu = \mu_1$ et $\mu = \mu'$, elle donne les deux ellipsoïdes dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$. En faisant varier $\mu$ par degrés infiniment petits, depuis $\mu_1$ jusqu'à $\mu'$, on partagerait le corps en couches infiniment peu épaisses, ayant la même température en tous leurs points.

Pour déterminer maintenant les températures correspondantes à chaque valeur de $\mu$, nous considérerons l'équation (9), et nous supposerons l'intégrale prise à partir de la limite $\mu_1 = \frac{a}{\sqrt{A}}$; ce qui donne

$$v = 2M \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}} \sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} + N:$$

comme on doit avoir

$$\nu = \nu_1 \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{a}{\sqrt{A}},$$

et

$$\nu = \nu' \quad \text{pour} \quad \mu = \frac{a'}{\sqrt{A}},$$

il en résultera

$$N = \nu_1, \qquad \nu' = 2M \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\frac{a'}{\sqrt{A}}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} + \nu_1,$$

de sorte qu'en posant

$$\int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\frac{a'}{\sqrt{A}}} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} = S,$$

on obtient

$$2M = \frac{\nu' - \nu_1}{S},$$

et par suite

$$(14) \quad \nu - \nu_1 = \frac{\nu' - \nu_1}{S} \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}}.$$

Maintenant il suffira pour connaître la température en un point quelconque du corps, de déterminer la valeur de $\mu$ qui lui correspond; et cette valeur s'obtiendra en exprimant que l'équation (13) est satisfaite par les coordonnées de ce point. Il est certain d'ailleurs que l'on ne trouvera pour $\mu$ qu'une seule valeur réelle et positive : car les trois axes des ellipsoïdes (13), croissant ensemble, il ne saurait y en avoir plus d'un à passer par un point donné.

*Expression du flux.*

Le flux rapporté à l'unité de surface, dont l'axe fait les angles $l$, $l'$, $l''$ avec les axes de coordonnées, étant désigné par F, on a, comme je l'ai démontré,

$$-F = A\frac{dv}{dx}\cos l + B\frac{dv}{dy}\cos l' + C\frac{dv}{dz}\cos l'';$$

pour former cette expression on observera que $v$ est une fonction de $\mu$ donnée par l'équation (14) et $\mu$ une fonction de $x, y, z$ donnée par l'équation (10). On aura ainsi

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dx}, \quad \frac{dv}{dy} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dy}, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\mu}\frac{d\mu}{dz},$$

$$\frac{dv}{d\mu} = \frac{v' - v_i}{S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}},$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\frac{x}{A\mu^2}}{\frac{x^2}{A\mu^3} + \frac{\mu y^2}{B(\mu^2 + \alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{C(\mu^2 + \mathit{6})^2}}, \quad \frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{y}{B(\mu^2 + \alpha)}}{\frac{x^2}{A\mu^3} + \frac{\mu y^2}{B(\mu^2 + \alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{C(\mu^2 + \mathit{6})^2}},$$

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{\frac{z}{C(\mu^2 + \mathit{6})}}{\frac{x^2}{A\mu^3} + \frac{\mu y^2}{B(\mu^2 + \alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{C(\mu^2 + \mathit{6})^2}},$$

$$(15)\ F = \frac{v_i - v'}{S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} \left\{ \frac{\frac{x}{\mu^2}\cos l + \frac{y}{\mu^2 + \alpha}\cos l' + \frac{z}{\mu^2 + \mathit{6}}\cos l''}{\frac{x^2}{A\mu^3} + \frac{\mu y^2}{B(\mu^2 + \alpha)^2} + \frac{\mu z^2}{C(\mu^2 + \mathit{6})^2}} \right\}.$$

M. Lamé a démontré que dans le cas d'une conductibilité constante, les flux au travers d'une surface isotherme, considérés aux extrémités de ses trois axes, étaient entre eux comme les longueurs de ces axes. Voyons quel sera le théorème correspondant dans le cas plus général dont nous nous occupons.

Dans la comparaison des flux correspondants à une même valeur de $\mu$, nous pourrons supprimer le facteur commun

$$\frac{v_1 - v'}{S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} + \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}}.$$

Les demi-axes de l'ellipsoïde étant désignés par $a''$, $b''$, $c''$; à l'extrémité de l'axe des $x$, on a

$$x = a'', \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \cos l = 1, \quad \cos l' = 0, \quad \cos l'' = 0.$$

Ce flux sera donc, au facteur commun près,

$$\frac{A\mu}{a''}.$$

On trouvera de même pour les flux aux extrémités des demi-axes $b''$, $c''$,

$$\frac{B(\mu^2 + \alpha)}{b''\mu}, \qquad \frac{C(\mu^2 + \mathcal{C})}{c''\mu}.$$

Ces trois flux sont donc entre eux

$$:: \frac{A\mu^2}{a''} : \frac{B(\mu^2 + \alpha)}{b''} : \frac{C(\mu^2 + \mathcal{C})}{c''},$$

et comme on a

$$A\mu^2 = a''^2, \quad B(\mu^2 + \alpha) = b''^2, \quad C(\mu^2 + \mathcal{C}) = c''^2,$$

ils seront entre eux

$$:: a'' : b'' : c''.$$

Ainsi, *les flux de chaleur qui traversent un ellipsoïde isotherme aux extrémités de ses trois axes sont entre eux dans le rapport même de ces axes.*

M. Lamé avait démontré ce théorème dans le cas d'une conductibilité constante; et c'est une chose remarquable que ce rapport ne soit pas altéré, quelle que soit la loi suivant laquelle la conductibilité varie avec la direction.

L'équation (15) conduit à une expression très simple du flux à travers un élément quelconque de la surface d'un ellipsoïde isotherme; et l'on en déduit une proposition qui renferme la précédente. En effet, l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde est

$$\frac{xx'}{A\mu^2} + \frac{yy'}{B(\mu^2+\alpha)} + \frac{zz'}{C(\mu^2+6)} = 1,$$

$x'$, $y'$, $z'$, étant les coordonnées du point de contact.

Soit P la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan, on aura

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{A^2\mu^4} + \frac{y'^2}{B^2(\mu^2+\alpha)^2} + \frac{z'^2}{C^2(\mu^2+6)^2}}},$$

$$\cos l = P\frac{x'}{A\mu^2}, \qquad \cos l' = P\frac{y'}{B(\mu^2+\alpha)}, \qquad \cos l'' = P\frac{z'}{C(\mu^2+6)};$$

substituant ces valeurs dans la formule (15) en observant que $x', y', z'$ doivent y être remplacés par $x, y, z$, il vient

$$(16) \quad F = \frac{P(v_1 - v')}{\mu S\sqrt{\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}}\sqrt{\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}}} = \frac{(v_1 - v')\sqrt{ABC}}{a''b''c''S}.P.$$

Ainsi, *le flux de chaleur qui traverse la surface d'un ellipsoïde isotherme en un point quelconque, est proportionnel à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en ce point.*

Cette proposition n'avait pas été remarquée par M. Lamé; mais elle l'avait été par M. Chasles dans le cas d'une conductibilité constante. Il est encore remarquable qu'elle subsiste, quelle que soit la loi suivant laquelle la conductibilité varie avec la direction.

On peut encore observer que le flux est en raison inverse du volume de l'ellipsoïde dont on considère la surface, et proportionnel à la différence des températures des surfaces extrêmes.

*Flux à travers une surface isotherme.*

Si l'on multiplie l'expression du flux, donnée par l'équation (16), par l'élément $ds$ de la surface de l'ellipsoïde isotherme, et qu'on fasse la somme de ces produits dans toute l'étendue de cette surface, on aura la quantité de chaleur qui la traverse dans l'unité de temps; son expression sera

$$\frac{(v_{,} - v')\sqrt{\mathrm{ABC}}}{a''b''c''\mathrm{S}} \Sigma \mathrm{P}ds.$$

Or $\frac{1}{3}\mathrm{P}ds$ est le volume du cône dont $ds$ est la base, et qui a son sommet au centre de l'ellipsoïde : donc $\Sigma\mathrm{P}ds$ est égal à trois fois le volume de cet ellipsoïde, ou à $4\pi a''b''c''$. Le flux cherché a donc pour valeur

$$4\pi \frac{(v_{,} - v')\sqrt{\mathrm{ABC}}}{\mathrm{S}}.$$

On voit qu'il est le même quelle que soit la surface isotherme, et cela devait être puisque toutes les températures restent invariables.

*Cas des ellipsoïdes isothermes semblables.*

Pour que deux ellipsoïdes isothermes quelconques, ayant pour demi-axes $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, soient semblables, il faudra que l'on ait

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Ces équations jointes aux équations (12) donnent

$$\frac{a}{\sqrt{\mathrm{A}}} = \frac{b}{\sqrt{\mathrm{B}}} = \frac{c}{\sqrt{\mathrm{C}}};$$

ce qui ne donne que les ellipsoïdes dont les axes sont proportionnels aux racines carrées des conductibilités principales.

Dans ce cas la formule (14) devient

$$v - v_, = \frac{v' - v_,}{S} \int_{\frac{a}{\sqrt{A}}}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{v_, - v'}{S}\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\sqrt{A}}{a}\right),$$

on a de plus

$$S = \frac{\sqrt{A}}{a} - \frac{\sqrt{A}}{a'},$$

$v_,$ et $v'$ désignant les températures constantes et données de deux ellipsoïdes déterminés, ayant pour demi-axes $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$.

Si l'on désigne par $a''$ le demi-axe des $x$ de l'ellipsoïde qui correspond à la valeur quelconque $\mu$, on aura $\mu = \frac{a''}{\sqrt{A}}$, d'où en substituant cette valeur à $\mu$,

$$v - v_, = (v' - v_,)\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a''}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}};$$

d'où l'on voit que *la température sera indépendante des conductibilités principales*.

Les ellipsoïdes isothermes semblables deviennent des sphères, quand la conductibilité est la même dans tous les sens.

*Surface sphérique isotherme.*

Pour que l'une des surfaces isothermes soit sphérique, on devra avoir, en désignant par R son rayon, et par $a$, $b$, $c$ les demi-axes de la surface intérieure du corps,

$$\frac{R^2 - a^2}{A} = \frac{R^2 - b^2}{B} = \frac{R^2 - c^2}{C}.$$

Éliminant R on trouve

$$\frac{Ab^2 - Ba^2}{Ac^2 - Ca^2} = \frac{A - B}{A - C}.$$

C'est la *condition pour qu'il puisse y avoir une surface sphérique iso-*

*therme dans le système dont fera partie l'ellipsoïde, ayant pour demi-axes a, b, c.*

Si elle est satisfaite, on aura

$$R^2 = \frac{Ab^2 - Ba^2}{A - B}.$$

Le flux de chaleur qui traverse la surface de cette sphère sera le même en tous ses points, puisque la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent est constante.

Supposons, comme cela est toujours permis, que l'on ait.... $\frac{a^2}{A} > \frac{b^2}{B} > \frac{c^2}{C}$, l'équation (13) ne représentera des ellipsoïdes que si l'on a $\mu^2 > \frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C}$.

Elle représentera des hyperboloïdes à une nappe, ayant leur axe imaginaire dirigé suivant l'axe des $z$ lorsque l'on aura

$$\mu^2 < \frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} \quad \text{et} \quad \mu^2 > \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}.$$

Enfin elle représentera des hyperboloïdes à deux nappes, ayant leur axe réel dirigé suivant l'axe des $x$, lorsque l'on aura

$$\mu^2 < \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B}.$$

En désignant par $\nu$ et $\rho$ les valeurs de $\mu$ qui se rapportent à ces deux derniers cas, les équations de ces trois espèces de surfaces seront

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{A\mu^2} + \frac{y^2}{B\left(\mu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\mu^2 + \frac{c^2}{C} - \frac{a^2}{A}\right)} = 1, \\ &\frac{x^2}{A\nu^2} + \frac{y^2}{B\left(\nu^2 + \frac{b^2}{B} - \frac{a^2}{A}\right)} + \frac{z^2}{C\left(\frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} - \nu^2\right)} = 1, \\ &\frac{x^2}{A\rho^2} + \frac{y^2}{B\left(\frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B} - \rho^2\right)} + \frac{z^2}{C\left(\frac{a^2}{A} - \frac{c^2}{C} - \rho^2\right)} = 1, \end{aligned} \right.$$

$a$, $b$, $c$, étant trois quantités arbitraires, qui sont les demi-axes d'un ellipsoïde renfermé dans la première de ces équations.

Supposons maintenant que par un point donné dont les coordonnées soient $x$, $y$, $z$, on fasse passer une surface de chacune de ces trois espèces, les trois équations précédentes détermineront $x$, $y$, $z$ au moyen des valeurs correspondantes de $\mu$, $\nu$, $\rho$ qui pourront être prises comme éléments de la détermination du point. En indiquant cette transformation, M. Lamé a fait observer que ces trois surfaces se coupent deux à deux à angle droit, comme l'avait démontré depuis long-temps M. Binet. Mais cela supposait la conductibilité constante, et nous allons voir que cette propriété n'a plus lieu lorsqu'elle est variable avec la direction.

En effet les équations (17) donnent pour $x$, $y$, $z$, les valeurs suivantes

$$
(18)\quad\left\{\begin{aligned}
x &= \frac{\mu\nu\rho\sqrt{A}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)}},\\
y &= \frac{\sqrt{\left(\mu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\nu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}-\rho^2\right)}\sqrt{B}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{b^2}{B}-\frac{c^2}{C}\right)}},\\
z &= \frac{\sqrt{\left(\mu^2+\frac{c^2}{C}-\frac{a^2}{A}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\nu^2\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\rho^2\right)}\sqrt{C}}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)\left(\frac{b^2}{B}-\frac{c^2}{C}\right)}}.
\end{aligned}\right.
$$

Les équations des plans tangents aux surfaces (17) sont

$$
\frac{xx'}{A\mu^2}+\frac{yy'}{B\left(\mu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)}+\frac{zz'}{C\left(\mu^2+\frac{c^2}{C}-\frac{a^2}{A}\right)}=1,
$$

$$
\frac{xx'}{A\nu^2}+\frac{yy'}{B\left(\nu^2+\frac{b^2}{B}-\frac{a^2}{A}\right)}-\frac{zz'}{C\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\nu^2\right)}=1,
$$

$$
\frac{xx'}{A\rho^2}-\frac{yy'}{B\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}-\rho^2\right)}-\frac{zz'}{C\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}-\rho^2\right)}=1.
$$

Si l'on pose la condition pour que les deux premiers soient perpendiculaires, et qu'on remplace $x'y'z'$ par les valeurs données par les équations (18), on arrive à

$$\varepsilon^2[(B-C)a^2+(C-A)b^2+(A-B)c^2]+\left(\frac{a^2}{A}-\frac{b^2}{B}\right)\left(\frac{a^2}{A}-\frac{c^2}{C}\right)A(C-B)=0,$$

équation qui n'est pas satisfaite d'elle-même.

On trouve semblablement deux conditions qui ne sont pas identiquement satisfaites pour que le premier plan tangent soit perpendiculaire au troisième et le deuxième au troisième. Mais elles ont lieu toutes les trois, si l'on a $A=B=C$, c'est-à-dire si la conductibilité est la même dans tous les sens.