**JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**

CHASLES

**Propriétés nouvelles de l'hyperboloïde à une nappe.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 4 (1839), p. 348-350.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A30_0>

## *Propriétés nouvelles de l'Hyperboloïde à une nappe ;*

PAR M. CHASLES.

Toutes les propositions que je vais énoncer sont relatives aux génératrices *d'un même système de génération* de l'hyperboloïde à une nappe.

Ces propositions sont nouvelles et d'un genre particulier. La plupart s'appliquent au paraboloïde hyperbolique, qui n'est qu'une variété de l'hyperboloïde.

Considérons donc les génératrices d'un même système de génération d'un hyperboloïde à une nappe. Concevons un plan transversal quelconque; et, par un point pris arbitrairement dans ce plan, menons des droites dont chacune rencontre deux génératrices de l'hyperboloïde. Nous dirons que ces deux droites sont *conjuguées*. Toutes les génératrices de l'hyperboloïde seront ainsi distribuées en groupes ou systèmes de deux génératrices *conjuguées*.

Ce sont ces systèmes de deux génératrices conjuguées dont nous avons à présenter diverses propriétés assez curieuses.

D'abord remarquons qu'on peut déterminer ces systèmes d'une infinité de manières; car il y a deux choses arbitraires qui nous ont servi à les former, savoir, le plan transversal et le point pris dans ce plan.

Si l'on prend arbitrairement deux génératrices comme *conjuguées entre elles*, et deux autres génératrices quelconques comme conjuguées aussi entre elles, ces deux systèmes suffiront pour déterminer tous les autres. Cela est évident.

Les génératrices d'un hyperboloïde, groupées ainsi deux à deux, jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Toutes les génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde étant prises deux à deux comme conjuguées, si l'on mène un plan transversal quelconque qui rencontrera les deux génératrices conjuguées de chaque système en deux points, la droite qui joindra ces deux points passera toujours par un même point fixe de ce plan.*

Et réciproquement, *si par un point quelconque de l'espace on mène des droites dont chacune s'appuie sur deux génératrices conjuguées, toutes ces droites seront dans un même plan.*

Ainsi, la propriété dont jouissent les systèmes de droites conjuguées, par rapport au plan et au point qui ont servi à les former, s'applique à tout autre plan et à tout autre point de l'espace.

2°. *Si l'on mène les droites dont chacune mesure la plus courte distance entre deux droites conjuguées, toutes ces droites s'appuieront sur un même axe fixe* X *auquel elles seront perpendiculaires; et les distances de deux génératrices conjuguées, à cet axe, seront entre elles comme les tangentes trigonométriques des angles que ces deux droites feront avec cet axe.*

3°. *Un cylindre quelconque étant circonscrit à un hyperboloïde, deux plans tangents au cylindre, parallèles entre eux, passent par deux génératrices de la surface; et les systèmes de deux génératrices ainsi déterminés, sont des systèmes de génératrices conjuguées.*

Ce théorème offre une autre manière de déterminer les systèmes de génératrices conjuguées.

Il s'ensuit que les deux propositions précédentes peuvent être considérées comme des propriétés relatives à un cylindre quelconque circonscrit à un hyperboloïde, et pourraient prendre, sous ce point de vue, d'autres énoncés.

A chaque plan mené arbitrairement dans l'espace, correspond, d'après le théorème 1, un point situé dans ce plan, par lequel passent toutes les droites qui joignent deux à deux les pieds des génératrices conjuguées. Et à un point pris arbitrairement dans l'espace, correspond un plan passant par ce point et dans lequel se trouvent toutes les droites qui, issues de ce point, s'appuient sur les droites conjuguées prises deux à deux.

La considération de ces points par rapport aux plans, ou des plans par rapport aux points, donne lieu à divers théorèmes. Pour les énoncer plus clairement, nous appellerons *pôle* d'un plan, le point en question situé dans ce plan, et ce plan sera dit le plan *polaire* du point.

4°. *Quand plusieurs plans passent par un même point, leurs* PÔLES *sont situés sur un même plan qui est le* PLAN POLAIRE *du point.*

Et réciproquement, *quand plusieurs points sont situés sur un* *même plan, leurs* PLANS POLAIRES *passent par un même point qui est le* PÔLE *de ce plan.*

5°. *Quand des plans passent par une même droite* L, *leurs pôles sont situés sur une seconde droite* L';

*Et les plans menés par cette droite* L' *ont leurs pôles situés sur la première* L.

De sorte que les deux droites L, L' jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés réciproques.

6°. *Ces deux droites jouissent des mêmes propriétés que deux génératrices conjuguées de l'hyperboloïde.* Ce qui donne lieu aux quatre propositions suivantes :

7°. *Si l'on mène un plan transversal quelconque, la droite qui joindra les deux points où il rencontrera les deux droites* L, L', *passera par le pôle de ce plan;*

8°. *La droite qui mesure la plus courte distance des deux droites* L, L' *s'appuie sur l'axe* X (théorème 2) *et lui est perpendiculaire; et les distances de cet axe à ces droites sont proportionnelles aux tangentes trigonométriques des angles qu'il fait avec elles;*

9°. *Les deux droites* L, L' *et deux génératrices conjuguées de l'hyperboloïde peuvent être prises pour quatre génératrices d'un même mode de génération d'un autre hyperboloïde.*

10°. *Deux systèmes de deux droites telles que* L, L', *sont quatre génératrices d'un même mode de génération d'un hyperboloïde.*

11°. *Quand des points sont situés sur une surface du second degré, leurs plans polaires enveloppent une autre surface du second degré;*

Et réciproquement, *les plans polaires des points de cette seconde surface sont tangents à la première.*

12°. *Si par les pôles de différents plans on mène les normales à ces plans, et qu'on demande que ces droites passent par un même point donné dans l'espace, toutes ces droites formeront un cône du second degré; et les pôles des plans seront sur une courbe à double courbure du troisième ordre.*

13°. *Si l'on demande que les normales, au lieu de passer par un même point, soient toutes situées dans un même plan donné, elles envelopperont dans ce plan une parabole; et les pôles par où elles seront menées seront sur la directrice de cette courbe.*

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .