

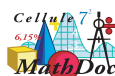
# JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CATALAN

## **Note sur la Théorie des Nombres.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 4 (1839), p. 7-8.

[http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher\\_notice.php?id=JMPA\\_1839\\_1\\_4\\_A2\\_0](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A2_0)



Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par la Cellule MathDoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD  
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>

NOTE

Sur la Théorie des Nombres ;

PAR E. CATALAN.

I.

THÉORÈME. « N étant un nombre entier quelconque, dont les diviseurs sont  $d, d', d'', \dots$ , et  $\varphi(n)$  désignant généralement le nombre des facteurs premiers avec  $n$ , et plus petits que  $n$ , on a

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = N. »$$

Démonstration (\*). Soit  $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ ,  $a, b, c, \dots$  désignant les facteurs premiers de N. En appelant  $d$  un quelconque des diviseurs de N, on pourra le représenter par  $a^i b^k c^l \dots$ , expression dans laquelle les exposants  $i, k, l, \dots$  peuvent varier respectivement de 0 à  $\alpha$ , de 0 à  $\beta$ , de 0 à  $\gamma$ , etc. Par une formule connue,

$$\varphi(d) = d \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \dots = a^{i-1}(a-1) \times b^{k-1}(b-1) \times c^{l-1}(c-1) \times \dots,$$

chacun des facteurs de ce dernier produit étant remplacé par l'unité, lorsque l'exposant qui s'y trouve est  $-1$ ; la somme  $\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots$  sera donc égale au produit des quantités

$$\begin{aligned} & 1 + (a-1) + a(a-1) + a^2(a-1) + \dots + a^{\alpha-1}(a-1), \\ & 1 + (b-1) + b(b-1) + b^2(b-1) + \dots + b^{\beta-1}(b-1), \\ & 1 + (c-1) + c(c-1) + c^2(c-1) + \dots + c^{\gamma-1}(c-1), \text{ etc.,} \end{aligned}$$

(\*) On en trouve une autre dans la 2<sup>me</sup> section des *Recherches arithmétiques* de M. Gauss.

de sorte qu'en supprimant les termes qui se détruisent, il viendra

$$\varphi(d) + \varphi(d') + \varphi(d'') + \dots = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots = N. \quad C. Q. F. D.$$

## II.

En mettant la fonction  $(1+t+t^2+\dots+t^{m-1})^\mu$ , sous la forme  $(1-t^m)^\mu (1-t)^{-\mu}$ , on trouve que le coefficient de  $t^s$ , dans le développement de cette fonction, peut être exprimé par

$$k = \sum_0^q (-1)^t \cdot C_{\mu,t} \cdot C_{s-im+\mu-1, \mu-1} :$$

dans cette formule,  $q$  représente le quotient entier de  $s$  par  $m$ , et  $C_{n,p}$  désigne généralement le nombre des combinaisons de  $n$  lettres, prises  $p$  à  $p$ .

Prenons  $s = (m-1)\mu$  : le coefficient  $k$  deviendra l'unité; donc

$$(A) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) = \sum_0^q (-1)^t C_{\mu,t} \cdot P_{m(\mu-1)-1, \mu-1},$$

$P_{m(\mu-1)-1, \mu-1}$  désignant le nombre des arrangements de  $m(\mu-1)-1$  lettres, prises  $\mu-1$  à  $\mu-1$ .

Cette équation se simplifie dans le cas de  $m > \mu$ . En effet, le quotient exact de  $s$  par  $m$  étant  $\frac{(m-1)\mu}{m} = \mu - \frac{\mu}{m}$ , le quotient entier  $q$  se réduit alors à  $\mu-1$ . Donc

$$(B) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1) = \sum_0^{\mu-1} (-1)^t \cdot C_{\mu,t} \cdot P_{m(\mu-1)-1, \mu-1}.$$

Les réductions exprimées par les équations (A) et (B) sont assez remarquables: on a par exemple, en prenant  $m=8$  et  $\mu=5$ ,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 1 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 - \frac{5}{1} \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \\ &\quad - \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 + \frac{5}{1} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4. \end{aligned}$$