JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

RODRIGUES

Note sur les inversions ou dérangements produits dans les permutations.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 236-240.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A20_0>

Note sur les Inversions, ou dérangements produits dans les permutations;

PAR M. OLINDE RODRIGUES.

1. Je désigne par $Z_{n,i}$, le nombre de manières de permuter n lettres entre elles, et de telle sorte que dans chaque permutation, il se trouve un nombre d'inversions égal à i : i peut varier de o à $\frac{n.n-1}{2}$ ou de o à n_2 suivant une notation plus commode.

Chaque lettre considérée par rapport au rang qu'elle occupe, dans l'ordre primitif supposé, ne peut évidemment produire au plus qu'un nombre d'inversions égal à l'indice de son rang diminué d'une unité : $Z_{n,i}$ est donc égal au nombre de solutions de l'équation

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = i,$$

où chacune des variables x_0, x_1, x_2, etc., peut varier depuis o jusqu'au nombre marqué par son indice, et où la valeur de chacune de ces variables indique, pour chaque permutation, le nombre d'inversions produites par la lettre dont le rang est marqué par l'indice de cette variable augmenté d'une unité. On voit bien que chaque permutation doit satisfaire à cette équation, et réciproquement pour chacune des solutions de cette équation, il est facile de former la permutation qui lui correspond. En effet, on déplacera, dans l'ordre primitif donné, l'une des lettres, d'autant de rangs qu'il est nécessaire pour produire le nombre d'inversions qui lui est attribué dans la solution considérée, puis on opérera le même déplacement pour une autre lettre dans les $n-1$ rangs restants disponibles, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement du nombre i d'inversions, qui diminue à chaque déplacement d'autant d'unités qu'il y a de rangs franchis par la lettre qu'on déplace.

$Z_{n,i}$ est donc le coefficient de t^i dans le produit,

$$(1+t)(1+t+t^2)(1+t+t^2+t^3)\ldots(1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}).\ (*)$$

2. En désignant ce produit par U, on aura

$$U = Z_{n,0}+Z_{n,1}t+Z_{n,2}t^2+\ldots+Z_{n,n_2}t^{n_2}.$$

Pour $t=1$, il vient $U=1.2.3\ldots n=S_0^{n_2}.Z_{n,i}$, comme on devait bien s'y attendre.

Si $t=-1$, on trouve $U=0=Z_{n,0}-Z_{n,1}+Z_{n,2}-Z_{n,3}+$ etc. C'est-à-dire qu'il y a autant de permutations *paires* qu'*impaires* quant au nombre d'inversions qu'elles contiennent. Ce qui est encore évident *à priori* : car on sait que chaque *transposition* de deux lettres, change une permutation de paire en impaire *et vice versâ* : or on peut considérer toutes les permutations comme partagées en deux moitiés, dont l'une contienne ces deux lettres en ordre direct, et l'autre les contienne transposées; les permutations paires de la première moitié correspondront aux impaires de la seconde et réciproquement. La totalité des paires dans les deux moitiés réunies, sera donc égale à la totalité des impaires.

On a de plus

$$\frac{dU}{dt} = U.\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1+2t}{1+t+t^2}+\frac{1+2t+3t^2}{1+t+t^2+t^3}+\text{etc.}\right)$$

Quand $t=1$,

$$\frac{dU}{dt}=(1.2.3\ldots n).\frac{n.n-1}{4}=\frac{[n]}{2}\ \frac{n.n-1}{2}$$

$$=Z_{n,1}+2Z_{n,2}+3Z_{n,3}+\ldots+(n_2-1)Z_{n,n_2}.$$

C'est la solution trouvée d'une autre manière par M. Terquem pour le problème de M. Stern, relatif à la somme de toutes les inversions contenues dans les permutations de n lettres (**).

(*) On voit de suite que $Z_{n,n_2-i}=Z_{n,i}$, ce qui s'explique d'abord en attribuant aux n lettres un ordre inverse de l'ordre primitif adopté : les inversions i deviennent n_2-i.

(**) *Voir* le tome III de ce Journal, page 559.

Mais on peut aussi arriver à ce résultat plus simplement. En effet, il y a autant de permutations dans lesquelles un couple de lettres données est en inversion, qu'il y en a dans lesquelles il a conservé son ordre direct. C'est-à-dire que pour chaque couple, il y a $\frac{[n]}{2}$ permutations dans lesquelles il est en inversion, ce qui fait $\frac{[n]}{2}$ inversions provenant de chaque couple : or il y a $\frac{n.\overline{n-1}}{2}$ couples dans n lettres; la somme totale des inversions provenant de tous les couples est donc $\frac{n.\overline{n-1}}{4}[n]$.

Enfin soit $t=-1$: il est aisé de voir que $\frac{dU}{dt}$ sera nul, si n est >3, parce que dans la dérivation, l'un des deux facteurs $1+t$, $1+t+t^2+t^3$, rendra toujours nuls tous les termes de $\frac{du}{dt}$.

Ainsi la somme des inversions comprises dans les permutations paires, est égale à celle des inversions comprises dans les permutations impaires, pourvu que n soit >3.

On peut vérifier directement cette proposition en remarquant ce qui arrive, lorsque après avoir formé toutes les permutations de n lettres, et les avoir séparées en paires et impaires, on intercale une $n+1^{ième}$ lettre, successivement de rang en rang, dans chaque permutation paire et impaire. On voit d'abord que si la somme des inversions paires est égale à celle des inversions impaires, les intercalations de la $n+1^{ième}$ lettre n'altéreront pas cette égalité, et qu'ainsi l'égalité ayant lieu pour $n=4$, comme il est aisé de s'en assurer, elle subsiste pour toutes les valeurs supérieures de n. L'égalité peut même se déduire de l'inégalité, comme effectivement cela arrive en passant des permutations 3 à 3 aux permutations 4 à 4, parce que les échanges de permutations paires ou impaires, *et vice versâ*, s'opérant en nombre pair, il s'établit une balance parfaite entre la somme des inversions des permutations paires, et celles des inversions des permutations impaires, produites par les quatre intercalations successives de la quatrième lettre, introduite dans les permutations des trois premières.

3. Dans ce qui précède, nous ne considérons que les inversions produites par n lettres dans leurs permutations; mais on peut rechercher les inversions de m lettres permutées n à n. Ce problème se ramène aisément au premier: $(m, n)\, Z_{n,i}$ exprimera le nombre de permutations de m lettres n à n, ayant chacune un nombre i d'inversions, (m, n) désignant le nombre de combinaisons de m lettres n à n.

Car chacune de ces combinaisons peut être écrite d'abord sans inversion aucune des lettres qui la composent; et permutée $[n]$ fois elle engendrera $Z_{n,i}$ arrangements à i inversions. Il y a donc en tout $(m, n)\, Z_{n,i}$ arrangements de m lettres n à n à i inversions.

La somme totale des inversions qui pour n lettres permutées n à n est $\frac{n\,.\,(n-1)}{4}[n]$, sera pour m lettres permutées n à n, $\frac{(m, n) n . (n-1)[n]}{4}$.

4. Après ces généralités, occupons-nous maintenant de déterminer $Z_{n,i}$.

La fonction U peut s'écrire ainsi $(1 - t^{-n})(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^n)$. Désignons par $E_{n,i}$ le coefficient de t^i dans le produit $(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^n)$, et par $[n, p]$ l'expression $\frac{n . n+1 \ldots n+p-1}{1.2.3\ldots p}$: nous aurons

$$Z_{n,i} = E_{n,i} + [n, i]\, E_{n,i-1} + \ldots + [n, 2]\, E_{n,i-2} + \ldots + [n, i]\, E_{n,0},$$

et pour déterminer $E_{n,i}$, l'équation aux différences d'ordre indéterminé, mais la plus simple de toutes

$$E_{n,i} = E_{n-1,i} - E_{n-1,i-n},$$

$E_{n-1,i}$ étant nul pour $i < 0$: de là il résulte pour $n > i - 1$,

$$E_{n,i} = E_{i,i},$$

et

$$Z_{n,i} = E_{i,i} + [n, 1]\, E_{i-1,i-1} + [n, 2]\, E_{i-2,i-2} + \text{etc.},$$

ou

$$Z_{n,i} = [n, i] + [n, i-1]\, E_{1,1} + [n, i-2]\, E_{2,2} + \ldots + E_{i,i}.$$

Telle est l'expression générale de $Z_{n,i}$, la plus simple que j'aie trouvée.

Quant à la détermination de $E_{n,i}$, je ne vois après la multiplication même des facteurs $(1-t)(1-t^2)(1-t^3)\ldots(1-t^n)$, aucun procédé plus simple que le calcul des valeurs successives, déduites de la loi exprimée par l'équation aux différences ci-dessus. Si la question numérique avait quelque importance, on formerait rapidement une table très étendue des valeurs de $E_{n,i}$. Voici les premières valeurs de cette fonction. En supposant $n=i$ à partir de $i=0$, on a pour $E_{0,0}$, $E_{1,1}$, $E_{2,2}$, $E_{3,3}$, etc., les nombres

$$1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ -1,$$

d'où résulte

$$Z_{n,0}=1,\ Z_{n,1}=n-1,\ Z_{n,2}=[n-1,\ 2]-1,\ Z_{n,3}=[n-1,\ 3]-n,$$
$$Z_{n,4}=[n-1,\ 4]-[n,\ 2],\ Z_{n,5}=[n-1,\ 5]-[n,\ 3]+1,$$
$$Z_{n,6}=[n-1,\ 6]-[n,\ 4]+n,\ \text{etc.},$$

n étant supposé toujours au moins égal à i, etc.

Je ne m'arrêterai pas à ce détail, et je ferai remarquer seulement en finissant cette note, l'analogie de ces recherches avec celles dont s'est occupé Euler, sous la dénomination de *partition des nombres*. $E_{n,i}$ est l'excédent du nombre de manières de partager i en un nombre *pair* de nombres inégaux moindres que $n+1$, sur le nombre de manières de le partager en un nombre *impair* de nombres inégaux aussi moindres que $n+1$; le nombre des parties étant lui-même moindre que $n+1$.