JOURNAL DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

LIOUVILLE, J.

Note sur quelques intégrales définies.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 225-235.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A19_0>

NOTE

Sur quelques intégrales définies ;

PAR J. LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie, le 22 avril 1839.)

1. Dans une note très intéressante qui fait partie d'un des derniers cahiers de ce Journal, M. Lejeune-Dirichlet considère l'intégrale

$$(1) \qquad V = \int\int \ldots \int x^{a-1} y^{b-1} \ldots z^{c-1} dx dy \ldots dz,$$

dans laquelle les variables $x, y, \ldots z$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$(2) \qquad \left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < 1 :$$

$a, b, \ldots c, \alpha, \beta, \ldots \gamma, p, q, \ldots r$ sont des constantes positives. La méthode de M. Dirichlet l'a conduit à une valeur remarquable de V, savoir

$$(3) \qquad V = \frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq \ldots r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{c}{r}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \ldots + \frac{c}{r}\right)},$$

que l'on peut, dit-il, obtenir par différents moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, centres de gravité, moments d'inertie, etc. L'importance de cette formule m'a engagé à en chercher une démonstration que je vais exposer.

2. D'abord en remplaçant $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p$ par x, $\left(\frac{y}{\beta}\right)^q$ par $y, \ldots$ $\left(\frac{z}{\gamma}\right)^r$ par z,

et dx, dy,... dz par $\frac{\alpha}{p}x^{\frac{1}{p}-1}\,dx$, $\frac{\beta}{q}y^{\frac{1}{q}-1}\,dy$,... $\frac{\gamma}{r}z^{\frac{1}{r}-1}\,dz$, on a

$$V = \frac{\alpha^a\beta^b\ldots\gamma^c}{pq\ldots r}.U,$$

U étant une intégrale

$$(4)\qquad \int\int\ldots\int x^{\frac{a}{p}-1}.y^{\frac{b}{q}-1}\ldots z^{\frac{c}{r}-1}.dxdy\ldots dz,$$

de même forme que V, mais dans laquelle x, y,... z doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x+y+\ldots+z<1.$$

En posant $\frac{a}{p}=k$, $\frac{b}{q}=l$,... $\frac{c}{r}=m$, il viendra

$$U=\int\int\ldots\int x^{k-1}.y^{l-1}\ldots z^{m-1}.dxdy\ldots dz,$$

et il s'agira de prouver que

$$(5)\qquad U=\frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)}.$$

3. Quand le nombre des variables x, y, etc., se réduit à l'unité, on a

$$U=\int_0^1 x^{k-1}dx=\frac{1}{k}=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(1+k)}:$$

la formule (5) est donc exacte alors.

Elle l'est également, d'après un théorème connu, lorsque le nombre des variables x, y, etc., se réduit à 2 : il vient dans ce cas

$$U=\int_0^1 x^{k-1}dx\int_0^{1-x} y^{l-1}dy=\frac{1}{l}\int_0^1 x^{k-1}.(1-x)^l.dx.$$

Or, par une formule d'Euler, on a

$$(6)\qquad \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^l.dx=\frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

et il en résulte

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l)}{l\Gamma(1+k+l)} = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(1+k+l)},$$

ce qui s'accorde avec la formule (5).

4. M. Poisson a démontré la formule (6) par la considération des intégrales doubles, dans le XIX^e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. En s'appuyant sur le même artifice, M. Jacobi a donné ensuite de cette formule une démonstration qui rentre au fond dans celle de M. Poisson, mais dont le calcul est peut-être un peu plus simple. Rappelons ici en peu de mots cette démonstration.

En multipliant membre à membre les deux équations

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty e^{-x}.x^{k-1}.dx,\quad \Gamma(l) = \int_0^\infty e^{-y}.y^{l-1}.dy,$$

on a

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}.x^{k-1}.y^{l-1}.dxdy.$$

Remplaçons les variables x et y par deux autres variables u et v liées aux premières par les relations

$$x = uv,\quad y = u(1-v),\quad \text{d'où}\quad x+y = u.$$

Les limites relatives à u et v seront 0 et ∞, 0 et 1 ; par le principe fondamental de la transformation des intégrales doubles, on obtiendra $dxdy = ududv$: il vient donc

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \int_0^\infty\int_0^1 e^{-u}.u^{k+l-1}.v^{k-1}(1-v)^{l-1}.dudv,$$

d'où

$$\Gamma(k)\Gamma(l) = \Gamma(k+l)\int_0^1 v^{k-1}.(1-v)^{l-1}.dv,$$

et par conséquent

$$\int_0^1 v^{k-1}.(1-v)^{l-1}.dv = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}.$$

Or en remplaçant v par x et l par $1+l$, cette dernière équation coïncide avec la formule (6).

5. Supposons maintenant que U soit une intégrale triple : on pourra l'écrire ainsi

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^{y_1} y^{l-1}dy \int_0^{z_1} z^{m-1}dz,$$

y_1 et z_1 représentant respectivement les différences $1-x$, $1-x-y$, en sorte que l'on a $1-x=y_1$, $y_1-y=z_1$.

Désignons par u et v de nouvelles variables, et posons

$$z = vz_1, \quad y = uy_1;$$

les limites communes de u et v seront 0 et 1; l'intégrale U prendra ainsi la forme

$$U = \int_0^1 x^{k-1}dx \int_0^1 u^{l-1}y_1^l du \int_0^1 v^{m-1}z_1^m dv;$$

puis, à cause de $y_1 = 1-x$, $z_1 = y_1 - uy_1 = (1-x)(1-u)$, elle deviendra

$$U = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}dx \,.\, \int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du \,.\, \int_0^1 v^{m-1}dv.$$

Les intégrations relatives aux diverses variables peuvent maintenant s'effectuer indépendamment l'une de l'autre, et comme on a

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l+m}\,dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(1+l+m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

$$\int_0^1 u^{l-1}(1-u)^m du = \frac{\Gamma(l)\Gamma(1+m)}{\Gamma(1+l+m)}, \quad \int_0^1 v^{m-1}dv = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1+m)},$$

la valeur de U sera finalement

$$U = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+m)},$$

conformément à la formule (5).

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t, dans l'intégrale U, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement sur t, z, y et x, et l'on posera $1-x=y_1$, $y_1-y=z_1$, $z_1-z=t_1$:

les limites relatives à t, z, y et x seront respectivement o et t_1, o et z_1; o et y_1, o et 1 : si donc on remplace t, z et y par de nouvelles variables liées aux premières par les relations

$$t = wt_1, \quad z = vz_1, \quad y = uy_1,$$

les limites communes à ces nouvelles variables seront o et 1; de plus on aura

$$y_1 = 1 - x, \; z_1 = (1 - x)(1 - u), \; t_1 = (1 - x)(1 - u)(1 - v);$$

par conséquent les variables x, u, v, w pourront être séparées ; en d'autres termes l'intégrale multiple U se décomposera dans un produit de quatre intégrales qui toutes s'exprimeront par des fonctions Γ à l'aide de la formule (6). Cette méthode est générale, et quel que soit le nombre des variables x, y, etc., elle conduit à la formule (5) qui se trouve ainsi démontrée.

6. On peut présenter cette démonstration sous une autre forme, en suivant une marche semblable à celle indiquée au n° 4, d'après M. Jacobi. Pour plus de généralité, considérons l'intégrale

$$W = \iint \ldots \int f(x+y+\ldots+z)\, x^{k-1}y^{l-1}\ldots z^{m-1}dxdy\ldots dz,$$

dans laquelle $f(x+y+\ldots+z)$ désigne une fonction quelconque de $x+y+\ldots+z$, et supposons que $x, y, \ldots z$ prennent dans cette intégrale toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + \ldots + z < h,$$

h étant une constante positive.

Admettons d'abord qu'il y ait deux variables seulement x et y. On pourra écrire

$$W = \int_0^h x^{k-1}dx \int_0^{h-x} f(x+y)y^{l-1}dy.$$

Effectuons le changement de variables indiqué n° 4, c'est-à-dire faisons

$$x = uv, \quad y = u(1 - v):$$

les limites relatives aux nouvelles variables u et v seront o et h, o et 1, de sorte qu'on aura

$$W = \int_0^h \int_0^1 f(u) u^{k+l-1} . v^{k-1} (1 - v)^{l-1} . du dv,$$

d'où

$$W = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)} \int_0^h f(u) u^{k+l-1} . du.$$

Ainsi la valeur de W dépend à la fois des fonctions Γ et d'une certaine intégrale simple.

7. Admettons maintenant que W contienne trois variables x, y, z. En posant $h - x = y_1$, on pourra écrire

$$W = \int_0^h x^{k-1} dx \int_0^{y_1} y^{l-1} dy \int_0^{y_1 - y} f(x + y + z) z^{m-1} dz.$$

Mais l'intégrale

$$\int_0^{y_1} y^{l-1} dy \int_0^{y_1 - y} f(x + y + z) z^{m-1} dz$$

est du genre de celle que nous venons de traiter, et d'après les calculs du n° 6, elle est égale à

$$\frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^{y_1} f(x + u) u^{l+m-1} . du :$$

à cause de $y_1 = h - x$, la valeur de W devient donc

$$W = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^h x^{k-1} dx \int_0^{h-x} f(x + u) u^{l+m-1} . du,$$

de sorte qu'en appliquant une seconde fois les résultats du n° 6, on obtient

$$W = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \cdot \frac{\Gamma(k)\Gamma(l+m)}{\Gamma(k+l+m)} \cdot \int_0^h f(\theta) \theta^{k+l+m-1} . d\theta.$$

8. Cette méthode de réduction successive étant évidemment générale, nous voyons que l'intégrale

$$(7) \quad W = \iint \ldots \int f(x + y + \ldots + z) x^{k-1} . y^{l-1} \ldots z^{m-1} dx dy \ldots dz$$

s'exprime dans tous les cas par la formule

$$(8)\qquad W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+\ldots+m)}\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+\ldots+m-1}.d\theta,$$

dont le second membre contient plusieurs fonctions Γ et une certaine intégrale simple.

Lorsqu'on prend $f(\theta) = 1$, et de plus $h = 1$, l'intégrale W coïncide avec l'intégrale U du n° 2, et l'équation (8) fournit

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(k+l+\ldots+m)} \cdot \frac{1}{k+l+\ldots+m},$$

c'est-à-dire

$$W = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)}{\Gamma(1+k+l+\ldots+m)},$$

conformément à la formule (5).

Réciproquement la formule (5) étant admise, il serait aisé d'en conclure la formule (8), en suivant une marche semblable à celle que l'on emploie lorsque de l'expression connue du moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène quelconque, on veut déduire celle du moment d'inertie d'un ellipsoïde formé de couches hétérogènes.

Au lieu de l'intégrale W, on pourrait évidemment considérer l'intégrale d'une fonction de la forme

$$f\left[\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r\right] x^{a-1} y^{b-1} \ldots z^{c-1} dx dy \ldots dz,$$

en étendant l'intégration à toutes les valeurs positives de $x, y, \ldots z$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \ldots + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r < h.$$

On serait conduit à une formule semblable à la formule (8): seulement, dans le second membre, il y aurait un nouveau facteur

$$\frac{\alpha^a \beta^b \ldots \gamma^c}{pq\ldots r},$$

et $k, l, \ldots m$ se trouveraient remplacés par $\frac{a}{p}, \frac{b}{q}, \ldots \frac{c}{r}$.

J'ajouterai que la constante h, qui figure dans la formule (8), peut être supposée aussi grande qu'on veut, et par conséquent infinie.

9. Conservons toutes les notations du n° précédent, mais supposons de plus que la somme $k+l+\ldots+m$ soit égale à l'unité, et que $f(\theta)$ soit la dérivée $\frac{dF(\theta)}{d\theta}$ ou $F'(\theta)$ d'une certaine fonction $F(\theta)$. L'intégrale

$$\int_0^h f(\theta)\,\theta^{k+l+\ldots+m-1}.d\theta$$

sera égale à $F(h)-F(o)$, et puisque

$$\Gamma(1+k+l+\ldots+m)=\Gamma(2)=1,$$

l'on aura

$$W=\Gamma(k)\Gamma(l)\ldots\Gamma(m)[F(h)-F(o)].$$

Ainsi en particulier, dans le cas d'une intégrale double, on trouvera

$$\int_0^h x^{k-1}dx\int_0^{h-x}F'(x+y)y^{l-1}dy=\Gamma(k)\Gamma(l)[F(h)-F(o)].$$

Cette dernière formule se simplifiera encore, si l'on remplace l par sa valeur $1-k$, et si l'on a égard à l'équation connue

$$\Gamma(k)\Gamma(1-k)=\frac{\pi}{\sin k\pi}.$$

On obtient de cette manière

$$(9)\qquad \int_0^h x^{k-1}dx\int_0^{h-x}F'(x+y)y^{-k}dy=\frac{\pi[F(h)-F(o)]}{\sin k\pi}.$$

10. Soit μ un paramètre plus petit que ρ : faisons $h=\rho-\mu$, et de plus supposons que le paramètre μ entre dans la fonction F de telle manière que l'on ait $F(x)=\varphi(x+\mu)$. L'équation (9) deviendra

$$(10)\qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx\int_0^{\rho-x-\mu}\varphi'(x+\mu+y)y^{-k}dy=\frac{\pi[\varphi(\rho)-\varphi(\mu)]}{\sin k\pi},$$

et si l'on suppose la limite $\rho=\infty$, et la fonction $\varphi(\rho)$ assujétie à la condition de s'évanouir pour une valeur infinie de ρ, elle donnera

$$(11) \qquad \int_0^\infty x^{k-1}dx \int_0^\infty \varphi'(x+\mu+y)y^{-k}dy = -\frac{\pi\varphi(\mu)}{\sin k\pi}.$$

Ce dernier résultat s'accorde avec ceux que j'ai obtenus, dans mon *Mémoire sur une formule d'Analyse*, par la considération des différentielles à indices fractionnaires, et que j'ai vérifiés ensuite par un moyen particulier. Le moyen que j'ai employé pour cette vérification diffère peu de celui du n° 6, qui sert à démontrer la formule (8). C'est ce que l'on reconnaîtra en lisant avec un peu d'attention les n°s 4 et 5 du Mémoire cité (*voyez* le tome XII du *Journal de M. Crelle*, page 276). L'usage des coordonnées polaires auquel j'ai eu recours alors, équivaut évidemment à la transformation des variables imaginée par M. Jacobi.

11. Posons

$$\varphi(\rho) - \varphi(\mu) = f(\mu):$$

$f(\mu)$ sera une fonction quelconque de μ assujétie à la condition de s'évanouir pour $\mu = \rho$. L'équation (10) deviendra

$$(12) \qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx \int_0^{\rho-x-\mu} f'(x+\mu+y)y^{-k}dy = -\frac{\pi f(\mu)}{\sin k\pi}.$$

Cette nouvelle formule (12) pourra servir à résoudre le problème suivant :

« Soit $f(\mu)$ une fonction de μ assujétie à s'évanouir pour $\mu = \rho$:
» on propose de trouver une fonction $\psi(\mu)$ qui satisfasse à l'équation

$$(13) \qquad \int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi(\mu + x)\,dx = f(\mu),$$

» la valeur de μ restant toujours plus petite que ρ, et la constante k
» étant positive et < 1. »

En comparant l'équation (13) à la formule (12), on voit de suite qu'il suffira de prendre

$$\psi(\mu) = -\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\rho-\mu} f'(\mu+y)y^{-k}dy.$$

Mais cela ne démontrerait pas que le problème proposé n'est susceptible que d'une solution; il est donc plus convenable de procéder comme on va le voir.

Changeons, dans l'équation (13), μ en $\mu+y$, puis multiplions par $y^{-k}dy$, et intégrons entre les limites $y=0$, $y=\rho-\mu$: son premier membre deviendra

$$\int_0^{\rho-\mu} y^{-k}dy\int_0^{\rho-\mu-y} \psi(x+\mu+y)\, x^{k-1}dx,$$

ou bien, en changeant l'ordre des intégrations,

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}dx\int_0^{\rho-x-\mu} \psi(x+\mu+y)\, y^{-k}dy\,,$$

ce qui, d'après la formule (12), équivaut à

$$-\frac{\pi}{\sin k\pi}\int_\rho^\mu \psi(\mu)\,d\mu.$$

D'après cela, on aura

$$-\frac{\pi}{\sin k\pi}\int_\rho^\mu \psi(\mu)d\mu = \int_0^{\rho-\mu} f(\mu+y)y^{-k}dy,$$

d'où l'on tire, en différentiant et observant que $f(\rho)=0$,

$$\psi(\mu) = -\frac{\sin k\pi}{\pi}\int_0^{\rho-\mu} f'(\mu+y)y^{-k}dy,$$

ce qu'il fallait démontrer.

12. On peut encore se proposer de trouver la valeur de $\psi(\mu)$ satisfaisant à l'équation (13) lorsque k est >1. Supposons par exemple la constante k comprise entre 1 et 2. En différenciant l'équation (13) par rapport à μ, nous aurons

$$-(\rho-\mu)^{k-1}\psi(\rho)+\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi'(\mu+x)\,dx = f'(\mu),$$

et comme l'intégration par parties donne

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-1}\psi'(\mu+x)dx = (\rho-\mu)^{k-1}\psi(\rho)-(k-1)\int_0^{\rho-\mu} x^{k-2}\psi(\mu+x)dx,$$

il en résultera

$$\int_0^{\rho-\mu} x^{k-2}\psi(\mu+x)\,dx = -\frac{f'(\mu)}{k-1}.$$

Le premier membre de cette dernière équation se réduit à zéro pour $\mu=\rho$, et nous admettrons que le second jouit de la même propriété. Cela étant il viendra (puisque $k-1$ est <1)

$$\psi(\mu) = \frac{\sin(k-1)\pi}{(k-1)\pi}\int_0^{\rho-\mu} f''(\mu+y)\,y^{-(k-1)}dy.$$

On trouvera d'une manière semblable la valeur de $\psi(\mu)$ lorsque la constante k est comprise entre 2 et 3, ou plus généralement entre deux nombres entiers consécutifs quelconques.