JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

WANTZEL

**Extrait d'une lettre de M. Wantzel à M. Liouville.**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 4 (1839), p. 185-188.

<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1839_1_4_A15_0>

## *Extrait d'une Lettre de* M. WANTZEL *à* M. LIOUVILLE.

« Je me suis occupé de nouveau de la question d'Analyse qui a pour but de déterminer la figure d'équilibre d'une masse fluide soumise aux attractions de ses particules et animée d'une vitesse constante de rotation, lorsqu'on suppose cette figure peu différente de la sphère. Je crois avoir levé l'objection que vous avez faite à la seconde méthode de Laplace dans le tome II du *Journal de Mathématiques* (juin 1837), ou plutôt avoir rendu cette méthode rigoureuse par une légère modification.

» L'équation à laquelle il faut satisfaire peut se mettre sous la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \tfrac{4}{3}\pi\alpha \mathrm{Y} - \alpha\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \mathrm{Y}'dpdq'\sin p - \tfrac{1}{2}g(1-\mu^2) + \mathrm{C} = 0,$$

en conservant les notations du Mémoire précité.

On peut la différentier trois fois par rapport à $\mu$ et écrire

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} dpdq'\sin p\cos^6 p\left(\frac{7}{3}\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3} - \frac{d^3\mathrm{Y}'}{d^3\mu'}\right) = 0,$$

toutes les fois que $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ ne devient infini pour aucune valeur de $\mu$; l'on conclut alors rigoureusement que $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3} = 0$, et, par suite, $\mathrm{Y} = l + m\mu + n\mu^2$.

» Supposons que $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ puisse devenir infini pour une valeur $h$ attribuée à $\mu$, le produit $e^{-\frac{k}{(\mu-h)^2}}\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ sera toujours infiniment petit pour des valeurs de $\mu$ très voisines de $h$, quelle que soit la quantité positive $k$. Le premier membre de l'équation (A) peut être considéré comme la limite de l'expression

$$\alpha\int_0^\pi\int_0^{2\pi} dpdq'\sin p\, e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}\left(\tfrac{7}{3}\mathrm{Y}\cos^6 p - \mathrm{Y}'\right) - \tfrac{1}{2}g(1-\mu^2) + \mathrm{C},$$

lorsque $k$ tend vers zéro.

En effet, la différence entre ces deux expressions est égale à l'intégrale

$$\alpha \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \left(\tfrac{7}{3} \mathrm{Y} \cos^6 p - \mathrm{Y}'\right)\left[1 - e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}\right],$$

qui peut être rendue aussi petite que l'on voudra en prenant $h$ suffisamment petit, puisque $1 - e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}$ est toujours infiniment petit, excepté pour les éléments où $(\mu' - h)^2$ n'est pas plus grand que $k$ dont la somme est proportionnelle à une puissance fractionnaire de $k$. Ainsi la fonction de $\mu$ et $k$ représentée par (B) est infiniment petite en même temps que $k$, quelle que soit la valeur de $\mu$. Si on la différentie trois fois par rapport à $\mu$, on obtient une expression qu'on peut mettre sous la forme

$$\text{(C)} \qquad \alpha \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3} \frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3} - \frac{d^3\mathrm{Y}'}{d\mu'^3}\right) e^{\frac{k}{(\mu'-h)^2}},$$

et qui jouit de la même propriété, puisque d'ailleurs c'est une fonction finie et continue de $\mu$. Substituons $h - k$ et $h + k$ à la place de $\mu$ dans $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ et soit H la plus grande valeur que prend alors cette quantité: en attribuant à $\mu$ la valeur correspondante, l'expression C deviendra

$$\text{(D)} \qquad \alpha \int_0^\pi \int_0^{2\pi} dp dq' \sin p \cos^6 p \left(\frac{7}{3} \mathrm{H} - \frac{d^3\mathrm{Y}'}{d\mu'^3}\right) e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}}.$$

Tous les éléments de cette intégrale qui correspondent à des valeurs de $\mu'$ comprises entre $h - k$ et $h + k$ seront insensibles puisque le produit $e^{-\frac{k}{(\mu'-h)^2}} \frac{d^3\mathrm{Y}'}{d\mu'^3}$ est infiniment petit entre ces limites. Les autres éléments sont tous de même signe que H et leur somme est nécessairement finie, puisque $\mu'$ passe par toutes les valeurs comprises entre $-1$ et $+1$, quelle que soit la valeur de $\mu$ en vertu de la relation $\mu' = \mu \cos^2 p - \sin^2 p \cos q'$. Ainsi l'expression (D) a toujours une valeur finie, si petit que soit $k$, et ne peut par conséquent devenir infiniment petit en même temps que $k$, à moins que H ne le devienne lui-même, en sorte que $\frac{d^3\mathrm{Y}}{d\mu^3}$ ne saurait être infini pour $\mu = h$.

» La démonstration se ferait de la même manière si l'on supposait que $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ pût devenir infini pour un nombre quelconque de valeurs de $\mu$.

» Dans l'exemple que vous avez présenté pour rendre palpable l'inexactitude du raisonnement de Laplace, on ne pourrait appliquer la méthode précédente. En effet, le premier membre de l'équation

$$\int_0^1 \alpha^3\left[\frac{12}{10}\varphi'''(x)-\varphi'''(\alpha x)\right]d\alpha=0$$

à laquelle on est conduit, peut être considéré comme la limite de l'expression

$$\int_0^1 e^{-\frac{k}{x}}\alpha^3\left[\frac{12}{10}\varphi'''(x)-\varphi'''(\alpha x)\right]d\alpha.$$

Or, dans cette intégrale $\alpha x$ ne peut prendre que des valeurs inférieures à $x$, en sorte que l'intégrale est infiniment petite quand on attribue à $x$ une valeur très petite, lors même que $\varphi'''(0)$ est infini.

» Mais on ne pourrait trouver d'intégrale de la forme

$$\int_a^b [m\varphi(x)-\varphi(x')]\,\psi(x')dx',$$

qui pût être nulle, quel que soit $x$, sans que $\varphi(x)=0$, si la différence $a-b$ des limites ne devient nulle pour aucune valeur de $x$. Nous supposons naturellement que $m$ est $>1$ et que $\psi(x')$ est constamment positif.

On pourrait encore démontrer d'une autre manière que l'équation (A) ne peut être satisfaite que par une valeur de la forme $l+m\mu+n\mu^2$. Si l'on pose $Y=-\frac{15g}{16\alpha}\mu^2+Z$, ce qui ramène l'équation (A) à celle-ci :

$$\text{(E)}\qquad \frac{4}{3}\pi Z-\int_0^\pi\int_0^{2\pi} Z'dpdq'\sin p+C=0;$$

il suffit de différentier une fois par rapport à $\mu$ pour obtenir l'équation

$$\int_0^\pi\int^{2\pi} dpdq'\cos^2 p\sin p\left(\frac{dZ}{d\mu}-\frac{dZ'}{d\mu'}\right)=0,$$

qui ne peut être satisfaite à moins que $\frac{dZ'}{d\mu'}$, ne soit constamment égal à sa plus grande valeur, en sorte que $Z = l + m\mu$.

» Si l'on suppose que $\frac{dZ}{d\mu}$ devienne infini pour $\mu = h$, on peut introduire alors le facteur $\frac{(\mu' - h)^2}{k + (\mu' - h)^2}$ et raisonner comme précédemment. En effet, ce facteur tend vers l'unité en même temps que $k$ converge vers zéro; et de plus, $(\mu' - h) \frac{dZ'}{d\mu'}$ est plus petit que la différence entre les valeurs de Z correspondantes à $\mu'$ et à $h$, quand $\mu'$ est très voisin de $h$, en sorte que le produit $\frac{(\mu' - h)^2}{k + (\mu' - h)^2} \frac{dZ'}{d\mu'}$ est infiniment petit en même temps que $\mu' - h$, lors même que la fonction Z n'est pas continue. On démontre donc, à l'aide de ce facteur, qu'il est impossible de supposer $\frac{dZ}{d\mu}$ infini, comme on l'a fait pour $\frac{d^3Y}{d\mu^3}$ en employant le facteur $e^{-\frac{k}{(\mu' - h)^2}}$. »

18 février 1839.