JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CATALAN

Solution d'un problème de Probabilité relatif au jeu de rencontre.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 469-482.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1837_1_2_A40_0>

SOLUTION

D'un Problème de Probabilité, relatif au Jeu de rencontre;

Par E. CATALAN,

Ancien élève de l'École Polytechnique.

---

1. *Une urne contient m boules marquées a, b, c, d,..., que l'on tire toutes successivement, pour les remettre ensuite. Quelle est la probabilité que, dans deux tirages consécutifs, n boules sortiront dans le même ordre?*

Supposons que l'on fasse le premier tirage, et qu'à mesure que les boules sortent de l'urne, on écrive leurs noms sur une même ligne; supposons aussi que la même chose ait lieu pour le second tirage, et que la seconde ligne soit écrite au-dessous de la première. On obtiendra de la sorte, deux suites composées chacune de m lettres, et qui seront par exemple :

$$\begin{array}{llr} 1^{\text{er}} \text{ tirage}\ldots\ldots & g,\ a,\ h,\ l,\ i,\ c,\ e,\ d,\ldots. & (1) \\ 2^{\text{e}} \text{ tirage}\ldots\ldots & i,\ l,\ h,\ g,\ b,\ d,\ e,\ f,\ldots. & (2) \end{array}$$

J'appellerai *correspondance* la rencontre, au même rang, de deux lettres semblables : ainsi, les lettres h, e forment deux correspondances.

La question revient alors à celle-ci :

Quelle est la probabilité qu'en écrivant au hasard les suites (1) *et* (2), *composées des mêmes lettres, on obtiendra n correspondances?*

Écrivons arbitrairement la première ligne; puis, pour former la seconde, commençons par faire correspondre n lettres; nous devrons ensuite écrire les autres $m-n$ lettres, de manière qu'elles ne présentent aucune correspondance : je désigne pour un instant par X_{m-n} le nombre de solutions dont cette question est susceptible.

Nous aurons alors, pour n correspondances *désignées*, X_{m-n} systèmes. Et comme les n lettres, au lieu d'êtres désignées, sont quelconques, le nombre X_{m-n} doit être multiplié par le nombre des combinaisons de m lettres, prises n à n; quantité que je désignerai par $C_{m,n}$.

Ainsi, pour un arrangement quelconque des lettres de la première ligne, il y en a $C_{m,n} \times X_{m-n}$ des lettres de la seconde, pour lesquels n lettres correspondent. De plus, les lettres de la première ligne pouvant être disposées d'autant de manières que l'indique le nombre des permutations de m lettres, prises toutes ensemble, il s'ensuit que le nombre des chances favorables à l'événement demandé, est

$$P_m . C_{m,n} . X_{m-n}. \tag{3}$$

Le nombre total des chances est évidemment $(P_m)^2$: donc la probabilité cherchée a pour expression

$$p = \frac{C_{m,n} . X_{m-n}}{P_m}; \tag{4}$$

ou bien, en mettant pour $C_{m,n}$ et P_m leurs valeurs connues,

$$p = \frac{X_{m-n}}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots(m-n)}. \tag{5}$$

2. Déterminons X_{m-n}.

En remplaçant $m-n$ par μ, la question peut être posée de cette manière :

Les μ lettres $a, b, c, d, \ldots h$, i étant écrites sur une même ligne, trouver de combien de manières l'on peut former une seconde ligne de ces mêmes lettres, avec la condition qu'aucune d'elles n'occupe le même rang dans ces deux lignes.

Cette quantité sera désignée par X_μ.

Supposons cette opération déjà effectuée pour les $\mu - 1$ lettres $a, b, c, \ldots h$; et considérons l'un quelconque de ces systèmes :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\text{re}} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & a,\ b,\ c, \ldots h, \\ 2^{\text{e}} \text{ ligne} \ldots\ldots\ldots & g,\ d,\ a, \ldots c. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Apportons la μ^e lettre i à la fin de chaque ligne ; puis, dans la seconde, changeons successivement chacune des $\mu - 1$ lettres qui y entrent, en i, et réciproquement.

Il est visible que nous obtiendrons de la sorte, $\mu - 1$ systèmes, qui feront partie des X_μ systèmes demandés.

Considérons encore deux lignes de $\mu - 1$ lettres, parmi lesquelles il y ait 1 correspondance ; par exemple :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ ligne}\ldots\ldots & a,\ b,\ c,\ d,\ldots h, \\ 2^{e} \text{ ligne}\ldots\ldots & a,\ f,\ d,\ b,\ldots c. \end{array}\right\} \quad (7)$$

Écrivons la μ^e lettre i à la fin de chaque ligne ; puis, dans la seconde, changeons i en a ; nous aurons encore un des arrangements cherchés. Nous pourrons faire la même chose pour chacune des $\mu - 1$ lettres $a,\ b,\ c,\ldots h$; et comme, pour une lettre qui correspond, il en reste $\mu - 2$, que l'on peut intervertir d'autant de manières que l'indique $X_{\mu-2}$, il s'ensuit que

$$X_\mu = (\mu - 1)(X_{\mu-1} + X_{\mu-2}). \qquad (8)$$

est évident que $X_1 = 0$, et $X_2 = 1$. On a ensuite $X_3 = 2 . 1 = 2$. $X_4 = 3\,(2 + 1) = 9$, $X_5 = 4\,(9 + 2) = 44$, etc.

On voit donc que la suite des termes X_1, X_2, $X_3, \ldots X_{\mu-2}$, $X_{\mu-1}$, $X_\mu, \ldots$ forme une série dans laquelle *un terme quelconque est égal à la somme des deux précédents, multipliée par le rang du terme qui précède celui que l'on cherche.*

3. On peut transformer la formule (8) en une autre plus simple :

D'abord, pour la symétrie du calcul, posons $X_0 = 1$: cette valeur satisfait à la loi générale, car alors $X_2 = 1\,(X_1 + X_0)$.

Ensuite, en changeant dans la formule ci-dessus, μ en $\mu - 2$, $\mu - 4, \ldots$ et supposant μ *pair*, nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} X_\mu = (\mu - 1)(X_{\mu-1} + X_{\mu-2}), \\ X_{\mu-2} = (\mu - 3)(X_{\mu-3} + X_{\mu-4}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_4 = 3(X_3 + X_2), \\ X_2 = 1\,(X_1 + 1). \end{array}\right\} \quad (9)$$

La somme de toutes ces équations est

$$X_\mu = (\mu-1)X_{\mu-1} + (\mu-2)X_{\mu-2} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + 1X_1 + 1. \quad (10)$$

Changeant μ en $(\mu-1)$, nous aurons, $(\mu-1)$ étant *impair*,

$$X_{\mu-1} = (\mu-2)X_{\mu-1} + \ldots + 3X_3 + 2X_2 + 1X_1; \quad (11)$$

d'où

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} + 1.$$

μ étant *impair*, nous obtiendrions de même

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} - 1.$$

La formule générale est donc

$$X_\mu = \mu X_{\mu-1} \pm 1, \quad (12)$$

en prenant le signe supérieur si μ est pair.

On voit donc, que, *pour obtenir un terme quelconque, il suffit de multiplier son rang par le terme précédent, et d'ajouter ou de retrancher l'unité.*

La valeur de X_μ croît très rapidement avec μ: on a $X_1=0$, $X_2=1$, $X_3=2$, $X_4=9$, $X_5=44$, $X_6=265$, $X_7=1854$, $X_8=14\,833$, $X_9=133\,496$, $X_{10}=1\,334\,961$, $X_{11}=14\,684\,570$, $X_{12}=176\,214\,841$, $X_{13}=2\,290\,792\,932$, $X_{14}=32\,071\,101\,049$, $X_{15}=481\,066\,515\,734$, etc.

4. Déterminons le terme général X_μ seulement en fonction de μ.

En changeant dans l'équation (12), μ en $\mu-1$, $\mu-2$,... nous obtiendrons les $\mu+1$ équations,

$$\left.\begin{aligned}
X_\mu &= \mu X_{\mu-1} \pm 1,\\
X_{\mu-1} &= (\mu-1)X_{\mu-2} \mp 1,\\
X_{\mu-2} &= (\mu-2)X_{\mu-3} \pm 1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
X_3 &= 3X_2 - 1,\\
X_2 &= 2X_1 + 1,\\
X_1 &= 1X_0 - 1,\\
X_0 &= 1.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Multipliant alors la 2^e équation par μ, la 3^e par $\mu(\mu-1)$, etc.; il vient, en ajoutant les produits :

$$\left.\begin{array}{l} X_\mu = \pm 1 \mp \mu \pm \mu(\mu-1) \mp \mu(\mu-1)(\mu-2) \pm \ldots \\ \quad -\mu(\mu-1)\ldots 3.2 + \mu(\mu-1)\ldots 3.2.1. \end{array}\right\} \quad (14)$$

Donc X_μ *est égal à la différence entre le nombre des permutations de* μ *lettres prises en nombre pair, et celui des permutations de ces mêmes lettres prises en nombre impair.*

5. La valeur de X_μ peut se mettre sous la forme

$$X_\mu = 1.2.3\ldots(\mu-1)\mu\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(\mu-1)\mu}\right] (15).$$

La série entre parenthèses a une analogie remarquable avec le développement de la base des logarithmes népériens : on sait que ce développement a pour valeur la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. De même, la série ci-dessus a pour valeur la somme des $\mu + 1$ premiers termes du développement de $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, après qu'on y a fait n infini.

En négligeant les puissances supérieures à la première, on a $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}$: il s'ensuit qu'en désignant à l'ordinaire par e la base des logarithmes népériens, la série ci-dessus est le développement de $\frac{1}{e}$, limité aux $\mu + 1$ premiers termes. C'est ce qui devient évident si l'on prend la relation

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \quad (16)$$

et si l'on y pose $x = -1$.

Il s'ensuit aussi que la valeur *limite* de X_μ est

$$\frac{1.2.3.4\ldots(\mu-1)\mu}{e}. \quad (17)$$

Comme la série (15) est très convergente, la valeur (17) est très approchée, dès que μ dépasse une certaine limite, qui n'est pas élevée. En faisant le calcul, on trouve que, pour $\mu > 13$,

$$\frac{1}{e} = 0{,}367\ 879\ 441\ 19\ldots \tag{18}$$

Donc aussi, pour $\mu > 13$,

$$X_\mu = 0{,}367\ 879\ 441\ 19 \times 1.2.3\ldots(\mu-1)\mu. \tag{19}$$

Enfin, si l'on met pour le produit des μ premiers nombres naturels, sa valeur approchée, on aura, à fort peu pres,

$$X_\mu = \frac{\mu^\mu \sqrt{2\pi\mu}}{e^{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{12\mu} + \frac{1}{288\mu^2} + \ldots\right) \tag{20}$$

5. Revenant au problème qui fait l'objet de cette note, nous aurons, en remplaçant X_{m-n} par sa valeur, dans la formule (5).

$$p = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)n}\left[1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-n-1)(m-n)}\right], \tag{21}$$

pour l'expression exacte de la probabilité. Lorsque $m-n$ dépasse 13, la valeur très approchée est

$$p = \frac{0{,}\ 367\ 879\ 441\ 19}{1.2.3\ldots(n-1)n}. \tag{22}$$

Prenons pour exemple $m=20$, $n=5$, $m-n=15$; les formules (21) ou (22) donnent également

$$p = 0{,}\ 003\ 065\ 662.$$

6. Cherchons la probabilité que, dans les deux tirages, aucune lettre ne sortira au même rang. Posant $n=0$ dans la formule (21), il vient pour la probabilité demandée,

$$p' = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}. \tag{23}$$

Et si m est infini,

$$p' = \frac{1}{e} \tag{24}$$

Telle est la probabilité que, dans deux séries des mêmes événements indépendants les uns des autres, et en nombre infini, aucun événement n'arrivera dans le même ordre.

Si de l'unité nous retranchons p', nous obtiendrons, pour la probabilité *d'au moins* une correspondance dans les deux tirages successifs,

$$p'' = \frac{e-1}{e}. \tag{25}$$

Cette probabilité est celle du *jeu de rencontre*, qui consiste en ceci :

Deux joueurs ont chacun un jeu de cartes, complet; chacun d'eux tire successivement une carte de son jeu, jusqu'à ce que la même carte sorte en même temps, des deux côtés. L'un des joueurs parie qu'il y aura *rencontre;* l'autre parie le contraire. En supposant le nombre des cartes infini, il est clair que la probabilité du premier est p'', et celle du second, p'.

On a

$$p'' = 0{,}632\ldots \quad p' = 0{,}368\ldots;$$

et comme ces valeurs sont fort approchées lorsque m est plus grand que 13, il s'ensuit qu'on peut les regarder comme exactes, même pour un jeu de 32 cartes (*).

7. Le problème (1) présente une circonstance assez remarquable : la valeur (22) ne contient en dénominateur que la variable n. Quant au numérateur, on vient de voir qu'aussitôt que $m-n$ dépasse 13, il reste, à fort peu près, constant. Donc aussi, la probabilité demandée est, presque rigoureusement, indépendante du nombre de boules que

(*) Le problème dont je m'occupe ici, m'avait été proposé, il y a plus de deux ans, à l'École Polytechnique. Ce n'est qu'après en avoir envoyé la solution à M. Liouville, que j'ai appris qu'Euler s'était occupé du problème **des rencontres**, qui est, comme on le voit, un cas très particulier du mien.

On trouvera la solution d'Euler dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1751. On pourra consulter aussi le *Calcul des Probabilités* de Laplace, p. 217, et le tome XII *des Annales de Mathématiques*. Je n'ai eu connaissance de tout cela que depuis peu de temps.

contient l'urne : elle dépend seulement de la quantité de boules qui doivent sortir aux mêmes rangs, dans les deux tirages.

8. Dans la formule (22), faisons varier n de o à m, et ajoutons tous les résultats : la somme est évidemment l'unité, qui est le symbole de la certitude. Donc

$$1 = \Sigma_0^m \frac{1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-n)}}{1.2.3\ldots n}. \qquad (26)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} 1 = 1\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}\right) &- \frac{1}{1}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(m-1)}\right) \\ &+ \frac{1}{1.2}\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots(m-2)}\right) - \ldots \\ &\mp \frac{1}{1.2.3.4\ldots(m-1)}\left(1+\frac{1}{1}\right) \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}. \end{aligned}$$

Multipliant les deux membres par $1.2.3\ldots(m-1)m$, elle devient

$$\begin{aligned} 1.2.3\ldots(m-1)m = &[1+m+m(m-1)+\ldots+m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1] \\ &-\frac{m}{1}[1+(m-1)+(m-1)(m-2)+\ldots+(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1] \\ &+\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}[1+(m-2)+(m-2)(m-3)+\ldots+(m-2)(m-3)\ldots 3.2.1] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mp\frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\ldots\frac{2}{m-1}[1+1] \pm 1. \qquad (27) \end{aligned}$$

Si l'on représente par S_n la somme des nombres de permutations de n lettres, prises o à o, 1 à 1, 2 à 2,... n à n, cette équation peut se mettre sous la forme

$$1.2.3\ldots(m-1)m = S_m - C_{m,1}.S_{m-1} + C_{m,2}.S_{m-2} - \ldots \mp C_{m,1}.S_1 \pm 1. \quad (28)$$

L'équation (27) exprime un théorème sur les nombres, l'équation (28) un théorème sur les combinaisons.

9. Je supposerai maintenant qu'au lieu d'extraire toutes les boules

de l'urne, on n'en tire qu'un nombre t. Le problème I se change en cet autre, plus général :

Quelle est la probabilité que, dans deux tirages consécutifs d'une urne contenant m boules marquées a, b, c,... h, i, dont il en sort t à chaque tirage, n lettres sortiront dans le même ordre?

En suivant la même marche que précédemment, l'on voit que, après avoir fait correspondre n lettres dans un système de deux lignes, il reste à placer dans chacune d'elles, $t-n$ autres lettres, prises parmi les $m-n$ restantes; et cela, avec la condition qu'il ne se présente plus aucune correspondance. Supposons pour un instant que cette opération a été effectuée de toutes les manières possibles, et désignons par $Y_{m-n,\,t-n}$ le nombre des systèmes ainsi obtenus.

Actuellement, les n lettres correspondantes pouvant être quelconques, et pouvant occuper t places, il s'ensuit que le nombre ci-dessus doit être multiplié par $C_{m,n}.P_{t,n}$. Les chances favorables à l'évènement demandé sont donc en nombre $C_{m,n}.P_{t,n}.Y_{m-n,\,t-n}$. Le nombre des chances possibles est $(P_{m,t})^2$. La probabilité cherchée a donc pour expression

$$p=\frac{C_{m,n}.\,P_{t,n}.\,Y_{m-n,\,t-n}}{(P_{m,t})^2}. \qquad (29)$$

10. Déterminons $Y_{m-n,\,t-n}$.

En remplaçant $m-n$ par μ et $t-n$ par α, la question revient à ceci :

De combien de manières peut-on former deux lignes composées de α lettres, prises parmi μ lettres données, avec la condition qu'aucune lettre n'occupe le même rang dans les deux lignes? Ce nombre sera représenté par $Y_{\mu,\alpha}$.

Soient les μ lettres $a, b, c, d\ldots g, h$. Considérons l'un quelconque des systèmes de deux lignes formées seulement de $\alpha-1$ lettres, système qui n'a aucune correspondance, et qui sera, pour fixer les idées :

$$\begin{array}{l} a,\ f,\ i,\ b\ \ldots\ e, \\ g,\ i,\ a,\ h\ \ldots\ d. \end{array} \qquad (30)$$

A la fin de chacune de ces deux lignes, apportons l'une quelconque des $\mu-(\alpha-1)$ lettres qui n'y entrent pas: par exemple, g pour la première, et c pour la seconde. Nous aurons alors deux lignes de α lettres; savoir

$$\begin{matrix} a, f, i, b \ldots\ldots e, g, \\ g, i, a, h \ldots\ldots d, c. \end{matrix} \qquad (31)$$

Il est visible que ce système sera l'un de ceux demandés, sauf le cas où les deux lettres introduites seraient semblables : nous reviendrons sur cette circonstance.

En n'en tenant pas compte, nous voyons que, pour un système de $(\alpha - 1)$ lettres, nous en obtenons $(\mu - \alpha + 1)^2$ de α lettres. Et comme le nombre des systèmes de $\alpha - 1$ lettres est représenté par $Y_{\mu, \alpha-1}$, celui des systèmes de α lettres le sera par $(\mu-\alpha+1)^2 . Y_{\mu,\alpha-1}$, dont il faut actuellement retrancher le nombre des systèmes composés de lignes terminées par une même lettre.

Or, si nous avons placé une même lettre a à la fin de deux lignes de $\alpha - 1$ lettres, c'est parce qu'elle n'y entrait pas encore : ces deux lignes peuvent donc être considérées comme composant l'un des systèmes de $\alpha - 1$ lettres, prises seulement parmi les $\mu - 1$ autres lettres $b, c, d, \ldots h$. Donc, parmi les systèmes obtenus tout-à-l'heure, il y en a $Y_{\mu-1, \alpha-1}$ terminés par a, a, autant par b, b, etc.; en tout, $\mu . Y_{\mu-1, \alpha-1}$ systèmes à rejeter. Nous avons donc

$$Y_{\mu, \alpha} = (\mu - \alpha + 1)^2 Y_{\mu, \alpha-1} - \mu . Y_{\mu-1, \alpha-1}. \qquad (32)$$

11. Avant d'aller plus loin, remarquons que, pour la symétrie des calculs, on peut supposer $Y_{\mu,0} = Y_{\mu-1, 0} = 1$: car alors, en faisant $\alpha = 1$ dans la formule, il vient

$$Y_{\mu, 1} = \mu^2 - \mu = \mu(\mu - 1).$$

Il est évident en effet que, si chaque ligne ne contient qu'une lettre, le nombre des systèmes est égal au nombre des permutations de μ lettres, prises 2 à 2.

Maintenant, changeons α en $\alpha - 1, \alpha - 2, \ldots 3, 2, 1$, nous obtiendrons les α équations

$$\left.\begin{aligned}
Y_{\mu,\alpha} &= (\mu-\alpha+1)^2 . Y_{\mu,\alpha-1} - \mu . Y_{\mu-1,\alpha-1},\\
Y_{\mu,\alpha-1} &= (\mu-\alpha+2)^2 . Y_{\mu,\alpha-2} - \mu . Y_{\mu-1,\alpha-2},\\
Y_{\mu,\alpha-2} &= (\mu-\alpha+3)^2 . Y_{\mu,\alpha-3} - \mu . Y_{\mu-1,\alpha-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Y_{\mu,2} &= (\mu-1)^2 . Y_{\mu,\alpha} - \mu . Y_{\mu-1,1},\\
Y_{\mu,1} &= \mu^2 . 1 - \mu . 1.
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Multiplions la seconde équation par $(\mu-\alpha+1)^2$, la troisième par $(\mu-\alpha+1)^2 . (\mu-\alpha+2)^2$, etc., puis ajoutons. Il vient

$$\left.\begin{aligned}
Y_{\mu,\alpha} = (\mu.\mu-1.\mu-2\ldots\mu-\alpha+1)^2 - \mu . [Y_{\mu-1,\alpha-1}\\
+(\mu-\alpha+1)^2 Y_{\mu-1,\alpha-2} + (\mu-\alpha+1)^2(\mu-\alpha+2)^2 Y_{\mu-1,\alpha-3}\\
+\ldots+(\mu-\alpha+1)^2 . (\mu-\alpha+2)^2 \ldots (\mu-1)^2]
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Cette équation aux différences finies, est plus compliquée que l'équation (32); mais elle va nous conduire facilement à l'expression générale de $Y_{\mu,\alpha}$.

Pour cela, posons successivement $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ dans cette équation, et dans celle que l'on en déduit en changeant μ en $\mu-1$; nous obtiendrons :

pour $\alpha = 1$, $Y_{\mu,1} = \mu^2 - \mu$, $Y_{\mu,1} = \mu(\mu-1)$
et $Y_{\mu-1,1} = (\mu-1)[(\mu-1)-1]$,

$$\begin{aligned}
\alpha = 2,\ Y_{\mu,2} &= \mu^2(\mu-1)^2 - \mu[(\mu-1)^2 - (\mu-1) + (\mu-1)^2]\\
&= \mu^2(\mu-1)^2 - \mu[2(\mu-1)^2 - (\mu-1)]
\end{aligned}$$

ou $Y_{\mu,2} = \mu(\mu-1)[\mu(\mu-1) - 2(\mu-1) + 1]$,

$$Y_{\mu-1,2} = (\mu-1)(\mu-2)[(\mu-1)(\mu-2) - 2(\mu-2) + 1],$$

$$\begin{aligned}
\alpha = 3,\ Y_{\mu,3} &= \mu^2(\mu-1)^2(\mu-2)^2 - \mu[(\mu-1)^2(\mu-2)^2\\
&\quad - 2(\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-1)(\mu-2) + (\mu-1)^2(\mu-2)\\
&\quad - (\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-2)^2(\mu-1)^2]\\
&= \mu^2(\mu-1)^2(\mu-2)^2 - \mu[3(\mu-1)^2(\mu-2)^2\\
&\quad - 3(\mu-1)(\mu-2)^2 + (\mu-1)(\mu-2)
\end{aligned}$$

$$Y = \mu(\mu-1)(\mu-2)[\mu(\mu-1)(\mu-2) - 3(\mu-1)(\mu-2) + 3(\mu-2) - 1],$$

$$\alpha = 4,\ Y_{\mu,4} = \mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)[\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) - 4(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) + 6(\mu-2)(\mu-3) - 4(\mu-3) + 1].$$

etc.

La loi est actuellement évidente, et nous sommes en droit de poser, *sauf vérification*

$$\left.\begin{aligned} Y_{\mu,\alpha} = \mu.(\mu-1)\ldots(\mu-\alpha+1)\Big[\mu.(\mu-1)\ldots(\mu-\alpha+1) \\ - \tfrac{\alpha}{1}(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1) + \tfrac{\alpha}{1}.\tfrac{\alpha-1}{2}.(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1) \\ - \ldots \pm \tfrac{\alpha}{1}(\mu-\alpha+1) \mp 1\Big]. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

En employant les mêmes relations que ci-dessus, cette formule peut se mettre sous la forme plus simple

$$\left.\begin{aligned} Y_{\mu,\alpha} = P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha} - C_{\alpha,1}.P_{\mu-1,\alpha-1} + C_{\alpha,2}.P_{\mu-2,\alpha-2} \\ - \ldots \pm C_{\alpha,1}.P_{\mu-\alpha+1,1} \mp 1]. \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

L'intégrale de l'équation (32) ayant été obtenue par voie d'induction, il est essentiel de la vérifier. Pour cela, changeons d'abord α en $\alpha-1$ dans (36), puis μ en $\mu-1$ et α en $\alpha-1$; nous aurons

$$\begin{aligned} Y_{\mu,\alpha-1} &= P_{\mu,\alpha-1}[P_{\mu,\alpha-1} - C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-1,\alpha-2} + C_{\alpha-1,2}.P_{\mu-2,\alpha-3} \\ &\qquad - \ldots \mp C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-\alpha+2,1} \pm 1], \\ Y_{\mu-1,\alpha-1} &= P_{\mu-1,\alpha-1}[P_{\mu-1,\alpha-1} - C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-2,\alpha-2} + C_{\alpha-1,2}.P_{\mu-3,\alpha-3} \\ &\qquad - \ldots \pm C_{\alpha-1,1}.P_{\mu-\alpha+1,1} \mp 1]. \end{aligned}$$

Multiplions la première de ces deux équations par $(\mu-\alpha+1)^2$, puis retranchons-en la seconde multipliée par μ. En remarquant que l'on a en général, $P_{m,n} = (m-n+1).P_{m,n-1}$ et $P_{m,n} = m.P_{m-1,n-1}$, nous obtiendrons d'abord

$$\begin{aligned} (\mu-\alpha+1)^2.Y_{\mu,\alpha-1} - \mu.Y_{\mu-1,\alpha-1} = P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha} - (C_{\alpha-1,1}+1)P_{\mu-1,\alpha-1} \\ + (C_{\alpha-1,2} + C_{\alpha-1,1}).P_{\mu-2,\alpha-2} - \ldots \pm (1 + C_{\alpha-1,1})P_{\mu-\alpha+1,1} \mp 1]. \end{aligned}$$

Mais l'on sait aussi que $C_{m,p} + C_{m,p-1} = C_{m+1,p}$: donc le second membre devient

$$= P_{\mu,\alpha}[P_{\mu,\alpha} - C_{\alpha,1} . P_{\mu-1,\alpha-1} + C_{\alpha,2} . P_{\mu-2,\alpha-2} - \ldots \pm C_{\alpha,1} . P_{\mu-\alpha+1,1} \mp 1] :$$

expression identique avec celle que nous avons trouvée pour $Y_{\mu,\alpha}$.

12. Si dans la formule (35), nous posons $\mu - \alpha = \delta$, le développement deviendra

$$\left.\begin{array}{l} Y_{\mu,\alpha} = [\mu(\mu-1)(\mu-2\ldots(\delta+1)]^2 \left[1 - \frac{1}{1}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right) + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)\left(1-\frac{\delta}{\mu-1}\right)\right. \\ \qquad - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)\left(1-\frac{\delta}{\mu-1}\right)\ldots\left(1-\frac{\delta}{\delta+2}\right) \\ \qquad \left.\mp \frac{1}{1.2.3\ldots(\alpha-1)\alpha}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)\left(1-\frac{\delta}{\mu-1}\right)\ldots\left(1-\frac{\delta}{\delta+1}\right)\right]. \end{array}\right\}$$

Comparant cette expression avec la formule (15), on voit que si $\alpha = \mu$,

$$Y_{\mu,\mu} = 1.2.3\ldots(\mu-1).\mu.X_\mu\,, \qquad (38)$$

ce qui est d'ailleurs évident.

La série entre parenthèse est très convergente : car ses termes décroissent plus rapidement que ceux du développement de e^{-1}. Si α, μ et δ sont de grands nombres, on pourra remplacer ce développement par celui-ci :

$$1 - \frac{1}{1}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right) + \frac{1}{1.2}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)^3 + \ldots \qquad (38)$$

qui a pour valeur $e^{-\left(1-\frac{\delta}{\mu}\right)} = \dfrac{1}{e^{\frac{\alpha}{\mu}}}$.

Il serait peut-être assez difficile de déterminer *à priori* le degré d'approximation que l'on pourra obtenir, attendu que plus on avance dans les séries (37) et (38), et plus les termes du même ordre diffèrent. Dans les cas où la série (38) pourra être employée avec avantage, on aura donc pour valeur approchée de $Y_{\mu,\alpha}$,

$$Y'_{\mu,\alpha} = \frac{[\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\alpha+1)]^2}{e^{\frac{\alpha}{\mu}}}, \qquad (39)$$

13. En mettant dans la formule (29), les valeurs des lettres qui y entrent, il vient

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{1.2.3\ldots n \times m(m-1)\ldots(m-n+1)}\left[1 - \dfrac{1}{1}\left(1 - \dfrac{\delta}{\mu}\right)\right. \\ \qquad \left. + \dfrac{1}{1.2}\left(1-\dfrac{\delta}{\mu}\right)\left(1 - \dfrac{\delta}{\mu-1}\right) - \ldots\right]. \end{array}\right\} \quad (40)$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{l} p = \dfrac{t(t-2)(t-2)\ldots(t-n+1)}{1.2.3\ldots n \times m(m-1)\ldots(m-n+1)}\left(1 - \dfrac{1}{1}\,\dfrac{t-n}{m-n}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{1.2}\cdot\dfrac{t-n}{m-n}\cdot\dfrac{t-n-1}{m-n-1} - \ldots\right) \end{array}\right\} \quad (41)$$

La série entre parenthèses a $\alpha + 1 = t - n + 1$ termes : le dernier a pour expression

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(t-n)}\cdot\frac{t-n}{m-n}\cdot\frac{t-n-1}{m-n-1}\ldots\frac{1}{m-t+1} = \frac{1}{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-t+1)}.$$

14. Si l'on suppose $t = n$, la probabilité devient

$$p' = \frac{1}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}. \quad (42)$$

Il est évident en effet, que si toutes les lettres que l'on tire de l'urne doivent sortir dans le même ordre aux deux tirages, la probabilité a pour expression $\frac{P_{m,n}}{(P_{m,n})^2}$.

Enfin, si nous supposons $n=0$, la valeur de p devient

$$\frac{1}{m(m-1)\ldots(t+1)}\left[1 - \frac{1}{1}\,\frac{t}{m} + \frac{1}{1.2}\,\frac{t}{m}\cdot\frac{t-1}{m-1} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots t}\,\frac{t}{m}\cdot\frac{t-1}{m-1}\ldots\frac{2}{m-t+2}\cdot\frac{1}{m-t+1}\right].$$

C'est la probabilité du *jeu de rencontre*, en supposant que l'on arrête ce jeu au $t^{\text{ième}}$ coup.