JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

LAMÉ

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 147-183.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1837_1_2_A15_0>

MÉMOIRE

Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température ;

PAR M. G. LAMÉ,

Ingénieur des Mines, Professeur de Physique à l'École Polytechnique (*).

PRMIÈRE PARTIE.

§ I.

Lorsqu'un corps solide homogène est en équilibre de température, sous l'influence de sources constantes de chaleur et de froid, contre lesquelles sa surface est immédiatement appliquée, la température (V), constante avec le temps, mais variable d'un point à l'autre de ce corps, est, comme l'on sait, une fonction des coordonnées x, y, z, qui satisfait à l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Il existe alors dans ce corps des surfaces où la température reste la même dans toute l'étendue de chacune d'elles. Ces surfaces d'égale température peuvent être concues représentées par une même équa-

(*) Ce Mémoire est extrait du tome V des *Savans étrangers*. Nous avons cru devoir le réimprimer ici, parce que le recueil dans lequel il se trouve est peu répandu et surtout parce que l'analyse ingénieuse dont l'auteur a fait usage ouvre une route nouvelle dans le calcul des équations différentielles partielles.

(J. LIOUVILLE.)

tion, contenant un paramètre variable de l'une à l'autre, et de la forme

$$F(x, y, z) = \lambda;$$

λ étant ce paramètre, ou la fonction des coordonnées dont la valeur numérique est constamment la même pour tous les points d'une surface individuelle.

Toute fonction F n'est pas propre à représenter des surfaces d'égale température pour un de tous les cas d'équilibre calorifique imaginables; elle doit satisfaire pour cela à une équation aux différences partielles qu'il est facile de trouver.

Si cette fonction (F ou λ) était connue, la température V devrait pouvoir être représentée par une équation de la forme

$$V = \varphi(\lambda),$$

puisque V et λ seraient constants ensemble, variables ensemble, dans toute l'étendue du corps proposé. On aurait d'après cela

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dx} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d^2V}{dx^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dx^2},\\
\frac{dV}{dy} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d^2V}{dy^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dy^2},\\
\frac{dV}{dz} &= \frac{dV}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dz}, & \frac{d^2V}{dz^2} &= \frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 + \frac{dV}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dz^2},
\end{aligned}$$

et par suite l'équation (1) pourrait être mise sous la forme

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] + \frac{dV}{d\lambda}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) = 0.$$

Or, $\frac{dV}{d\lambda}$ et $\frac{d^2V}{d\lambda^2}$ ne contenant d'autre variable que λ, le quotient

$$\left\{\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2}\right) : \left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right]\right\},$$

devrait jouir de la même propriété. Ainsi la fonction λ doit satisfaire à une équation différentielle de la forme

$$(2)\quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} - \psi(\lambda)\left[\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2\right] = 0,$$

(ψ étant une fonction arbitraire de λ), pour que l'équation ($\lambda = c$) puisse représenter un système de surfaces isothermes.

En remplaçant $\psi(\lambda)$ par $\frac{1}{\varphi(\lambda)} \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}$, on aura

$$\varphi(\lambda) \frac{d^2V}{d\lambda^2} + \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} \frac{dV}{d\lambda} = 0,$$

d'où en intégrant deux fois

$$V = A \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A'.$$

Si le corps proposé est limité par deux surfaces représentées par les équations $\lambda = a$, $\lambda = a'$, entretenues à des températures données T et T', on aura, pour déterminer les deux constantes A et A', les deux équations

$$T = A \int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A', \quad T' = A \int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi(\lambda)} + A',$$

d'où

$$A = \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi}},$$

et

$$A' = T - \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'} \frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a'} \frac{d\lambda}{\varphi}} \cdot \int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi};$$

en sorte que l'équation

$$(3) \qquad V = T + \frac{T' - T}{\int_{\lambda_0}^{a'} \frac{d\lambda}{\varphi} - \int^{a} \frac{d\lambda}{\varphi}} \left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\varphi} - \int_{\lambda_0}^{a} \frac{d\lambda}{\varphi} \right)$$

donnera la température V, correspondante à une surface quelconque λ.

§ II.

On voit que dans le cas particulier d'une enveloppe solide, dont les parois intérieure et extérieure seraient entretenues à des températures constantes, mais différentes de l'une à l'autre, la loi des températures stationnaires serait connue, si l'on pouvait déterminer *à priori* l'équation générale des surfaces isothermes qui correspondent à ce cas.

Les surfaces des parois devant être deux d'entre elles, le problème consisterait à intégrer l'équation (2), et à déterminer les formes ou constantes arbitraires que contiendrait la fonction λ, de manière que pour deux valeurs numériques données au paramètre c, l'équation $\lambda = c$ représentât successivement les surfaces des parois. Mais la solution analytique de ce problème serait généralement aussi difficile à trouver que celle qui consisterait à intégrer directement l'équation (1), et à déterminer les fonctions arbitraires de l'intégrale V, de manière qu'elle devînt numériquement égale à T ou à T′ pour tous les points des parois de l'enveloppe.

Les cas simples d'une sphère creuse et d'un cylindre creux indéfini à base circulaire, dans lesquels l'épaisseur de l'enveloppe solide serait partout la même, sont les seuls où la détermination préalable des surfaces isothermes n'offre aucune difficulté. Pour tout autre cas, les parois, quoique toujours comprises parmi ces surfaces, doivent le plus souvent s'en distinguer par quelque propriété singulière, et en quelque sorte ombilicale, qui n'appartienne pas à toutes les autres surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe.

Il ne suffirait pas, pour éloigner cette circonstance qui complique la recherche directe de l'équation générale de ces surfaces, que les parois appartinssent à la même famille, et que leurs équations, de même forme et du même degré, continssent le même nombre de paramètres; car, dans ce cas, qui paraît beaucoup plus simple au premier abord que celui où les parois seraient dissemblables, on ne pourrait pas conclure, en général, que les surfaces d'égale température dussent être directement représentées par des équations de même forme et du même degré que celles des surfaces qui limitent l'enveloppe solide. Par exemple, dans un ellipsoïde creux, dont la paroi interne serait semblable à la surface extérieure, les surfaces isothermes ne seraient pas nécessairement des ellipsoïdes semblables aux parois, ni même des ellipsoïdes.

§ III.

Les conditions nécessaires pour que la forme commune des équations des deux parois soit réellement celle qui appartient aux surfaces d'égale température, peuvent se déduire analytiquement de la vérification de l'équation (2).

En prenant cette forme pour l'équation générale des surfaces cherchées, on regardera toutes les constantes qu'elle contient comme des fonctions inconnues du paramètre λ; on en déduira, par des différentiations convenables, les coefficients différentiels partiels de ce paramètre; après les avoir substitués dans l'équation (2), on posera les relations nécessaires pour qu'elle soit satisfaite, quelles que soient les coordonnées; si ces relations entre les variations des constantes arbitraires ne sont pas incompatibles, leurs intégrations feront connaître comment le paramètre λ doit entrer dans les constantes de la forme proposée, pour qu'elle puisse représenter les surfaces d'égale température; enfin, il faudra que deux valeurs numériques données à ce paramètre puissent rendre l'équation générale successivement identique avec les équations des deux parois.

Si cette vérification ne réussit pas, il faudra en conclure que, dans le cas considéré, les surfaces isothermes de l'intérieur de l'enveloppe doivent être exprimées par une équation différente, et probablement plus compliquée que celle des parois; et que ces dernières ne rentrent dans l'équation générale que par la disparition de certains termes, essentiels pour toute autre surface individuelle.

§ IV.

J'appliquerai cette méthode au cas où l'enveloppe est limitée par deux surfaces du second degré ayant même centre, leurs axes principaux étant de plus situés sur les mêmes droites. Leurs équations seront de la forme

$$(4) \qquad mx^2 + ny^2 + pz^2 = 1.$$

Il s'agit de trouver comment les constantes m, n, p, doivent contenir λ, pour que l'équation (4) puisse représenter, par la variation successive de ce paramètre, toutes les surfaces d'égale température de l'intérieur de l'enveloppe proposée.

On regardera donc m, n, p, comme des fonctions inconnues de λ, ce qui donnera

$$2mx + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d\lambda}{dx} = 0,$$

$$\left(m' = \frac{dm}{d\lambda},\quad m'' = \frac{d^2m}{d\lambda^2},\ldots\right)$$

$$2mx + 4m'x\frac{d\lambda}{dx} + (m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + (m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)\frac{d^2\lambda}{dx^2} = 0,\ \text{etc.}$$

et par suite

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 = 4\,\frac{m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2},$$

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2\lambda}{dy^2} + \frac{d^2\lambda}{dz^2} = -\frac{\frac{m+n+p}{2}(m'x^2+n'y^2+p'z^2) - 2\,(mm'x^2+nn'y^2+pp'z^2)}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^2} - \frac{(m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2)\,(m''x^2 + n''y^2 + p''z^2)}{(m'x^2 + n'y^2 + p'z^2)^3}.$$

L'équation (2) devient alors, en faisant $\psi = \frac{\varphi'}{\varphi}$, et en posant, pour simplifier, $\frac{m+n+p}{2} = \text{L}$:

$$\begin{aligned}
&\{\varphi[(\text{L} - 2m)\,m'^2 + m''m^2] + m^2m'\varphi'\}\,x^4\\
+&\{\varphi[(\text{L} - 2n)\,n'^2 + n''n^2] + n^2n'\varphi'\}\,y^4\\
+&\{\varphi[(\text{L} - 2p)\,p'^2 + p''p^2] + p^2p'\varphi'\}\,z^4\\
+&\{\varphi[2(\text{L}-m-n)\,m'n' + m''n^2 + n''m^2] + (m^2n' + n^2m')\varphi'\}\,x^2y^2\\
+&\{\varphi[2(\text{L}-n-p)\,n'p' + n''p^2 + p''n^2] + (n^2p' + p^2n')\varphi'\}\,y^2z^2\\
+&\{\varphi[2(\text{L}-p-m)\,p'm' + p''m^2 + m''p^2] + (p^2m' + m^2p')\varphi'\}\,z^2x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Cette dernière équation devant être satisfaite quelles que soient les valeurs des coordonnées, on devra avoir les six relations

$$\varphi[(\mathrm{L}-2m)m'^2+m''m^2]+m^2m'\varphi'=0,$$
$$\varphi[(\mathrm{L}-2n)n'^2+n''n^2]+n^2n'\varphi'=0,$$
$$\varphi[(\mathrm{L}-2p)p'^2+p''p^2]+p^2p'\varphi'=0,$$
$$\varphi[2(\mathrm{L}-m-n)m'n'+m''n^2+n''m^2]+(m^2n'+n^2m')\varphi'=0,$$
$$\varphi[2(\mathrm{L}-n-p)n'p'+n''p^2+p''n^2]+(n^2p'+p^2n')\varphi'=0,$$
$$\varphi[2(\mathrm{L}-p-m)p'm'+p''m^2+m''p^2]+(p^2m'+m^2p')\varphi'=0.$$

Ou bien, en posant $m=\frac{1}{a}$, $n=\frac{1}{b}$, $p=\frac{1}{c}$:

$$\varphi\mathrm{L}a'^2=a''\varphi+a'\varphi',$$
$$\varphi\mathrm{L}b'^2=b''\varphi+b'\varphi',$$
$$\varphi\mathrm{L}c'^2=c''\varphi+c'\varphi',$$
$$\varphi\left[2\mathrm{L}a'b'+2(a'-b')\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right]=(a''+b'')\varphi+(a'+b')\varphi',$$
$$\varphi\left[2\mathrm{L}b'c'+2(b'-c')\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)\right]=(b''+c'')\varphi+(b'+c')\varphi',$$
$$\varphi\left[2\mathrm{L}c'a'+2(c'-a')\left(\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right)\right]=(c''+a'')\varphi+(c'+a')\varphi'.$$

Les trois premières donnent, par l'élimination de $\frac{\varphi'}{\varphi}$, les relations

$$\mathrm{L}(a'-b')=\frac{a''}{a'}=\frac{b''}{b'},$$
$$\mathrm{L}(b'-c')=\frac{b''}{b'}=\frac{c''}{c'},$$
$$\mathrm{L}(c'-a')=\frac{c''}{c'}=\frac{a''}{a'}:$$

en outre, si l'on retranche chacune des trois dernières d'un couple convenable des premières, φ' et φ se trouvent encore éliminés, et l'on a

$$\mathrm{L}(a'-b')^2=2(a'-b')\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right),$$
$$\mathrm{L}(b'-c')^2=2(b'-c')\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right),$$
$$\mathrm{L}(c'-a')^2=2(c'-a')\left(\frac{c'}{c}-\frac{a'}{a}\right).$$