JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

CORIOLIS

Note sur la chaînette d'égale résistance.

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 75-76.
<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1836_1_1_A6_0>

gallica

Cellule MathDoc

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

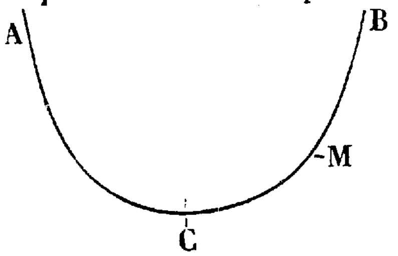
et catalogué par la Cellule MathDoc dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/

NOTE

Sur la chaînette d'égale résistance ;

PAR G. CORIOLIS.

Nous nous proposons, dans cette note, de donner l'équation assez remarquable de la courbe qu'affecterait une chaîne pesante, parfaitement flexible, dont l'épaisseur varierait d'un point à l'autre proportionnellement à la tension. Il est clair qu'une pareille chaîne n'offrirait pas plus de chance de rupture en un point qu'en un autre



Désignons par p le rapport entre le poids d'un élément ds et sa longueur, par T la tension, dont la valeur au point le plus bas C sera T_0. Représentons par x et y des coordonnées horizontale et verticale. On aura pour l'équilibre en un point M quelconque de la courbe, $T\frac{dx}{ds} = T_0$, $T\frac{dy}{ds} = \int pds$, l'intégrale commençant au point le plus bas de la courbe où l'on a $dy = 0$. Ces deux équations donnent $\frac{dy}{dx} = \int \frac{pds}{T_0}$, ou bien $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p}{T_0}\frac{ds}{dx}$. Par la condition d'égale résistance, on doit avoir $T = ap$, a étant une constante. Ainsi l'équation de la courbe deviendra $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T}{T_0 a}\frac{ds}{dx}$. Remettant pour T sa valeur tirée de la première des équations précédentes, on aura $a\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2}$, ou bien (en posant $\frac{dy}{dx} = y'$) $a\frac{dy'}{dx} = 1 + y'^2$; d'où $\frac{dx}{a} = \frac{dy'}{1+y'^2}$. En prenant pour origine des x le point le plus bas de la courbe, et en intégrant à partir de ce point pour lequel on aura $x=0$ et $y'=0$, on trouve $\frac{x}{a} = \text{arc}(\text{tang}=y')$, d'où $y' = \frac{dy}{dx} = \text{tang}\left(\frac{x}{a}\right)$. Intégrant encore à partir du point le plus bas que l'on prendra pour origine des y, on obtiendra

$$\frac{y}{a} = \log\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{x}{a}\right)}\right], \quad \text{ou bien } e^{\frac{y}{a}} \cos\left(\frac{x}{a}\right) = 1.$$

Telle est l'équation de la chaînette d'égale résistance, rapportée à son point le plus bas pour origine des coordonnées. La valeur de la constante a résultera de la relation $T = ap$. En l'appliquant au point le plus bas, on a $T_0 = ap_0$. Ainsi, en concevant une portion de chaîne de l'épaisseur constante qui existe au point le plus bas, la constante a sera la longueur qu'il faudrait donner à cette portion de chaîne pour que son poids ap_0 fût égal à la tension T_0 au point le plus bas, ou ce qui revient au même, à la composante horizontale de la tension aux points d'attache A ou B. La plus grande abscisse de cette courbe répond à $y' = \frac{1}{0}$. Comme on a $y' = \tang\left(\frac{x}{a}\right)$, la limite X de x ou de la demi-largeur de la courbe sera $X = a\,\frac{\pi}{2} = \frac{T_0}{p_0}\,\frac{\pi}{2}$. Cette limite est telle qu'une chaîne ayant cette demi-largeur pour longueur et la même force qu'au point le plus bas, aurait pour poids $\frac{\pi}{2}\,T_0$; la hauteur correspondante est $y = \infty$. Donc la courbe, quelle que soit la longueur de la chaîne, n'atteindra jamais la largeur πa, qui est ainsi une limite.

Si l'on veut avoir l'épaisseur p de la chaîne en fonction de l'abscisse, on trouve

$$p = T_0 \frac{dx}{ds}\,\frac{dy'}{dx}, \quad \text{ou } p = \frac{T_0}{a}\sqrt{1 + y'^2} = \frac{T_0}{a \cos\left(\frac{x}{a}\right)}.$$

On peut remarquer qu'en appelant α l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, on a l'équation $a\alpha = x$. Par conséquent l'arc de cercle décrit du point C comme centre avec le rayon a, et compris entre l'axe des x et une parallèle CN à la tangente au point M, sera égal à l'abscisse de ce point M.